Оптимальные методы в экстремальных задачах

Задание № 4: Градиентные методы

Дано: матрица A, вектор b, начальное приближение x^0, точность ε.

Требуется:

для задачи

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle \to \min,\ x \in R^n$$

1) найти приближённое решение $\overline{x}$ с точностью ε градиентным методом с постоянным шагом;

2) найти приближённое решение $\widetilde{x}$ с точностью ε градиентным методом с оптимальным шагом;

3) вычислить значения $f(\overline{x})$, $f(\widetilde{x})$, $\|\nabla f(\overline{x})\|$, $\|\nabla f(\widetilde{x})\|$;

4) провести анализ результатов.

Требования к программе

1) Вычисление значения функции $f(x)$ оформить в виде подпрограммы.

2) Вычисление градиента $\nabla f(x)$ оформить в виде подпрограммы.

3) Реализацию градиентных методов (п. 1–2) оформить в виде подпрограммы:
- входные параметры: начальное приближение (x^0), шаг (α), точность (ε);
- выходные параметры: приближённое значение точки минимума ($\overline{x}$), число итераций (k).

4) При реализации п. 1) задания провести вычисления с двумя значениями шага α из интервала $\left(0, \dfrac{2}{M}\right)$, где $M = \max\lambda(A)$. Эти величины выбрать самостоятельно.

Примечания

1)

$\nabla f(x) = Ax + b$

2)

$\langle x, y\rangle \quad \to \quad x' * y$

$\langle x, Ay\rangle \quad \to \quad x' * A * y$

norm(вектор)

вектор=**eig**(матрица)

min(вектор)

max(вектор)

Описания методов

1) *Градиентный метод с постоянным шагом*
начальное приближение: x^0,
постоянный шаг: α;

итерация: $\begin{cases} k = 0, 1, \ldots, \\ p^k = -\nabla f(x^k), \\ x^{k+1} = x^k + \alpha p^k; \end{cases}$

условие остановки: $\|\nabla f(x^k)\| \leqslant \varepsilon$,
приближённое значение точки минимума: $\overline{x} = x^k$.

2) *Градиентный метод с оптимальным шагом*
начальное приближение: x^0,
оптимальный шаг: $\alpha_* = \dfrac{2}{m+M}$, где $\ m = \min \lambda(A), \quad M = \max \lambda(A)$;

итерация: $\begin{cases} k = 0, 1, \ldots, \\ p^k = -\nabla f(x^k), \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_* p^k; \end{cases}$

условие остановки: $\|\nabla f(x^k)\| \leqslant \varepsilon$,
приближённое значение точки минимума: $\widetilde{x} = x^k$.

Варианты задания

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = 10^{-5}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = 10^{-6}$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = 10^{-5}$$

4.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = 10^{-6}$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = 10^{-5}$$

6.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = 10^{-6}$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = 10^{-5}$$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = 10^{-6}$$