Методы микроэкономического анализа

Введение

Данное пособие написано в качестве вспомогательного учебного материала к курсу "Методы экономического анализа который изучается студентами 4-го курса экономического факультета Новосибирского государственного университета. Этот курс ориентирован прежде всего на изучение разделов микроэкономической теории, объединенных под общим названием "фиаско рынка". Поскольку он завершает подготовку студентов первой ступени, то в нем учтены особенности преподавания теоретических дисциплин на экономическом факультете НГУ. Так, по необходимости обсуждаются также традиционные разделы микроэкономики, не нашедшие должного места в предшествующих курсах (в частности, принятие решений в условиях неопределенности), владение которыми необходимо для освоения основного материала курса.

Учитывая хорошую математическую подготовку студентов, авторы сочли возможным уделять достаточно большое внимание формально -логическим основам теории. Материал по уровню сложности соответствует примерно известным и популярным учебникам:
H. Varian. *Microeconomic Analysis.*
D. Krebs. *A Course in Microeconomic Theory.*

Методическая разработка может использоваться и как пособие для семинарских занятий по соответствующим разделам продвинутых курсов "Микроэкономики "Экономики общественного сектора "Финансовой экономики

Разделы 1,2 пособия являются вводными (базовыми); первый из них вводит необходимые понятия теории игр, второй раздел рассматривает модели совершенного рынка. Последующие разделы посвящены причинам и способам исправления отклонений рынка от Парето - эффективности по следующим направлениям: 1) экстерналии и общественные блага; 2) монополии и олигополии; 3) налоги и издержки сделок; 4) несовершенство информации.

Основная литература:

- Э.Мулен : Теория игр (с примерами из математической экономики).- М., Мир, 1985.
- Э.Маленво : Лекции по микроэкономическому анализу.- М., Наука, 1985.
- Э.Дж.Долан, Д.Е.Линдсей : Рынок; микроэкономическая модель.- Спб.,"Автокомп 1992.

Содержание

1 Некоторые понятия теории игр

Под понятие игры [1] подходит любая ситуация с целеполагающими (т.е. оптимизирующими) субъектами (участниками). В частности, любая оптимизационная задача - это игра с одним участником.

Описание структуры конкретной игры обычно содержит три блока: 1)допустимые множества ходов или стратегий участников; 2)цели; 3)тип поведения участников, зависящий от их информированности и др., описываемый "концепцией решения" игры. По этим трем заданным параметрам ситуации желательно уметь определять множество возможных исходов, то есть "решение".

$$\left.\begin{array}{r}\text{допустимые множества}\\ \text{цели}\\ \text{тип поведения}\end{array}\right] \Rightarrow \text{исход (решение) игры} \tag{1}$$

Для формального анализа игру обычно записывают в одной из форм: развернутой (детальное описание возможных ходов), характеристической (описываются значения выигрышей каждой коалиции, для анализа кооперативных игр) или стратегической (нормальной). Последний вариант, изучаемый далее, означает, что игра есть

$$G := \langle I, (X_i)_I, (u_i)_I \rangle \quad \text{, где}$$

$I := \{1, ..., m\}$ — множество участников i,

$X := (X_i)_I := \prod_i X_i$ — допустимое множество стратегий участников,

$u := (u_i)_I = (u_i)_{i\in I}$ — набор целевых функций участников (каждая целевая функция $u_i : \ X_i \mapsto I\!R$ зависит, вообще говоря, от всех $(x_j)_{j\in I}$).

Возможно также более общее — обобщенное представление игр в нормальной форме (оно соответствует общему Вальрасовскому равновесию и мы далее обращаемся к нему только в соответствующем разделе) Оно предполагает, что текущее допустимое множество стратегий $B_i(x_{j\neq i}) \subset X_i$ каждого участника может зависеть от текущих действий $x_{j\neq i}$ других участников. В этом случае игра есть

$$G := \langle I, (X_i)_I, (B_i)_I, (u_i)_I \rangle \ ,$$

где состояние игры есть $x \in X$.

Найти решение игры означает указать множество ее исходов (состояний, от которых участники не станут переходить к другим состояниям). Решений может и не быть: иногда игра не останавливается. В зависимости от конкретной гипотезы, которую мы примем о характере поведения и информации участников, мы можем прогнозировать разные типы решений. Мы будем изучать следующие решения игр в нормальной форме [2]:

Будем обозначать через $x_-i := (x_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$ набор стратегий всех игроков кроме i, и аналогично индексировать множества и функции.

Введем понятия сравнения стратегий. Естественно считать, что одна стратегия игрока "доминирует" другую, то есть заведомо "лучше" чем другая его стратегия — когда первая стратегия при любых действиях других игроков не хуже второй стратегии и по крайней мере для одного варианта действий других строго лучше (приносит больший выигрыш). Формально:

[1]Пособие: Э.Мулен

[2]Полезно знать, что бывает еще несколько типов кооперативных и некооперативных решений, кроме упоминаемых в данном пособии.

Таблица 1:

Информация, на которую ориентируется участник $j \in I$	Тип возникающих решений (равновесий)
1.Только на знание множеств $(X_i)_I$	$\Rightarrow \mathbb{D}E$ — "доминирующее MM — "осторожное" (максимин)
2.Еще и на чужие цели $(u_i)_{I\setminus\{j\}}$	$\Rightarrow SE$ — "сложное PNE — "Perfect Nash Equilibrium"
3.На текущий чужой ход $(x_i)_{I\setminus\{j\}}$	$\Rightarrow NE$ — Нэшевское
4.На текущую вероятность ходов	$\Rightarrow NEm$ — "Нэшевское в смешанных стратегиях"
5.Лидер знает цели, прочие - текущий ход	$\Rightarrow StE$ — "Равновесие Штакельберга"
6.На соглашение с партнерами	$\Rightarrow$ "Ядро"

Определение 1.0.1 *Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i* доминирует *стратегию $y_i \in X_i$, если*

$$\forall x_{-i} \in X_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}),$$

$$\exists x_{-i} \in X_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(y_i, x_{-i}),$$

где $-i := I \setminus \{i\},\ X_{-i} := (X_j)_{j\neq i}$.

Если две стратегии x_i, y_i доставляют одинаковые выигрыши $u_i(x_i, x_-i) = u_i(y_i, x_-i)$ при любых действиях партнеров x_-i, то они эквивалентны, *если же из пары стратегий ни одна не доминирует другую и они не эквивалентны, то они* несравнимы.

Понятие доминирования позволяет разбить X_i на классы:

Определение 1.0.2 *Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i называется* доминирующей *стратегией (среди его стратегий) если она доминирует любую другую либо эквивалентна ей:*

$$\forall y_i \in X_i, \forall x_{-i} \in X_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}).$$

Множество всех доминирующих стратегий игрока i обозначается $\mathbb{D}_i$. Множество всех недоминируемых *(ни одной другой стратегией) стратегий игрока i обозначается $\mathcal{D}_i$.*

Определение 1.0.3 *Множество* равновесий в доминирующих стратегиях *есть* $\mathbb{D}E := \prod_{i\in I} \mathbb{D}_i$.

Если доминирующее равновесие существует, то оно — самый естественный исход некооперативной игры. Однако игры часто не имеют равновесия в доминирующих стратегиях. В этом случае возникает проблема выбора типа равновесия, который бы наилучшим образом подходил к моделируемой ситуации, мы рассмотрим типы NE, MME, SE, StE.

Нэшевское равновесие довольно часто существует и родственно равновесию в доминирующих стратегиях: $\mathbb{D}E$ "глобально стационарно а Нэшевское равновесие - по крайней мере "локально стационарно".

Определение 1.0.4 *Множество* равновесий по Нэшу *(нэшевских равновесий) есть*

$$NE := \{x \in X|\ u_i(x_i, x_{-i}) = \max_{y_i \in X_i} u_i(y_i, x_{-i})\ )\ (i \in I)\}.$$

Не изучаемое здесь, но популярное, понятие PNE (обычно называемое просто "Perfect Equilibrium") задается для игр в развернутой форме с деревом последовательности ходов. Это понятие означает, что исход $x \in PNE$ является Нэшевским равновесием не только во всей игре, но и во всех подыграх (ветвях дерева).

Иными словами, Нэшевское равновесие - точка из которой ни одному игроку нет смысла уходить (он либо ничего от этого не приобретает, либо теряет). Подразумевается, что каждый игрок знает текущий выбор партнеров и ведет себя близоруко - не учитывает, что партнеры могут изменить свой выбор когда он изменит свой. Эта возможность приводит иногда к несуществованию стационарных точек (NE), тогда естественно пользоваться следующей вероятностной концепцией решения (исхода) игры.

Определение 1.0.5 *Для игры G с конечным множеством стратегий $X_i = \{1, ..., n_i\}$ $(i \in I)$ определим* смешанные стратегии *каждого игрока i как вероятности*[3] $\mu_i = (\mu_i^k)_{k=1}^{n_i} = (\mu_i^k(x_i^k))_{k=1}^{n_i} \in X_{im} := \{\mu_i \in I\!R_+^{n_i}|\quad \sum_{k=1}^{n_i} \mu_i^k = 1\}$ *с которыми данный игрок применяет свои исходные "чистые" стратегии x_i^k; определим* смешанное расширение игры $G_m := \langle I, (X_{im})_I, (U_i)_I \rangle$, *где* $U_i(\mu) := \sum_{x \in X_I} u_i(x)(\mu_1(x_1) \cdot \mu_2(x_2) \cdot ... \cdot \mu_n(x_n))$. Нэшевское равновесие в смешанных стратегиях NE_m *есть множество наборов $(\bar\mu_i)_I$, таких, что ни один игрок не может меняя смешанную стратегию улучшить матожидание своего выигрыша, при неизменных стратегиях партнеров; то есть*

$$\bar\mu_1 \in \arg\max_{\mu_1} \sum_{x \in X_I} u_1(x)(\mu_1(x_1) \cdot \bar\mu_2(x_2) \cdot ... \cdot \bar\mu_n(x_n)).$$

Для случая когда (осторожные) игроки не обладают информацией о целях партнеров и о том, какие стратегии выбирают другие, подходит следующая концепция.

Определение 1.0.6 *Множество* осторожных *или* максиминных решений *есть*

$$MM := \{x \in X|\ u_i(x_i, x_{-i}) = \sup_{y_i \in X_i} (\inf_{z_{-i} \in X_{-i}} u_i(y_i, z_{-i})\ )\ (i \in I)\}.^4 \tag{2}$$

Поясним: в осторожном решении (равновесием его называть не совсем точно) игроки ожидают от партнеров самого худшего для себя. Это кажется правдоподобным поведением при неизвестности целей партнеров и однократном розыгрыше; а также и в ситуации антагонистической игры.

Определение 1.0.7 *Множество* седловых точек *есть $Sad := MME \cap NE$. Это те Нэшевские (осторожные) равновесия, где худшие предположения сбываются.*

Определение 1.0.8 Антагонистической *называют игру с нулевой (или, что то же, постоянной) суммой выигрышей, т.е. такую, что $\sum_{i \in I} u_i(x) = 0, \forall x \in X$. Для антагонистической игры двух лиц* цена игры μ_0 *есть полезность первого игрока в седловой точке Sad, то есть*

$$\mu_0 := \sup_{x_1 \in X_1} \inf_{x_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2)\ = \inf_{x_2 \in X_2} \sup_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2)\ .$$

[3] Обычно имеют в виду повторяющуюся игру.

Есть виды равновесий в которых подразумевается, что игроки более дальновидны и информированы. В том числе в "сложном равновесии" считается, что они знают цели друг друга, последовательно отбрасывают доминируемые стратегии и ожидают того же от других.

Определение 1.0.9 *Определим последовательность игр $G^1, G^2, ..., G^t, ...$, задавая каждый раз множество всех стратегий новой игры как прошлое множество недоминируемых стратегий: $X^{t+1} := \mathcal{D}^t \;\; (t = 1, 2, ...)$ (предполагается что все игроки отбрасывают доминируемые стратегии одновременно). Множество* слабых сложных равновесий *игры G_1 есть стационарное множество этой последовательности: $WSE := \mathcal{D}^{\hat{t}} = \mathcal{D}^{\hat{t}-1} \; (\exists \hat{t} \geq 1)$.* Сложное равновесие [5] *$x \in SE$ есть такое $x \in WSE$, где каждый игрок имеет только эквивалентные стратегии в финальной игре $G_{\hat{t}}$.*

В равновесии по Штакельбергу (Stackelberg) первый игрок (лидер) ориентируется на индивидуально - оптимальные ответы партнеров зная их предпочтения, а остальные (ведомые) играют, как в NE, близоруко.

Определение 1.0.10 *Считая 1-го игрока лидером, обозначим множество Нэшевски-рациональных откликов его партнеров на его стратегию x_1 через*

$$NR_{-1}(x_1) := \{x_{-1} \in X_{-1} |\; u_i(x) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{-i}), \quad (i \neq 1)\},$$ *тогда:*

Осторожное (пессимистическое) равновесие по Штакельбергу *с лидером N 1 есть такой набор $\bar{x} \in StEP_1$, что*

$$\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \in \arg\max_{x_1 \in X_1} \min_{x_{-1} \in NR_{-1}(x_1)} \mathbf{u_1}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_{-1}}),$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{-\mathbf{1}} \in \arg\min_{x_{-1} \in NR_{-1}(\bar{x}_1)} \mathbf{u_1}(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1}, \mathbf{x_{-1}}).$$

(Оптимистическое) равновесие по Штакельбергу *$\bar{x} \in StEO_1$ есть*

$$\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \in \arg\max_{x_1 \in X_1} \max_{x_{-1} \in NR_{-1}(x_1)} \mathbf{u_1}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_{-1}}),$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{-\mathbf{1}} \in \arg\max_{x_{-1} \in NR_{-1}(\bar{x}_1)} \mathbf{u_1}(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1}, \mathbf{x_{-1}})$$

Равновесие Штакельберга может возникать, например, когда один из игроков (лидер) делает свой выбор раньше других ("ведомых") и знает их цели. Концепция $StEO_1$ предполагает доброжелательность партнеров к лидеру при выборе из эквивалентных для себя вариантов (из NR), а $StEP_1$ — недоброжелательность; если же выбор "ведомых" однозначен, то разницы между $StEO$ и $StEP$ нет.

В последующем мы используем также понятия некоторых кооперативных решений.

Определение 1.0.11 *Назовем (сильным)* множеством Парето *(*Парето-оптимумом*, или "сильной Парето-границей") множество неулучшаемых по Парето точек (исходов), то есть*[6]

$$\mathcal{P} := \{\hat{x} |\; \nexists x \in X \;\; : u(x) > u(\hat{x})\},$$

(иначе: это множество исходов неблокируемых большой коалицией I при сильном блокировании); слабая Парето-граница *есть*

$$W\mathcal{P} := \{\hat{x} |\; \nexists x \in X \;\; : u(x) \gg u(\hat{x})\}.$$

[5] Рассматривают также сложные равновесия с неодновременным отбрасыванием худших стратегий, а с заданной последовательностью ходов (Мулен, стр.40). Они подобны вводимым ниже равновесиям Штакельберга StE (наши определения $StEO_i, StEP_i$ не традиционны).

[6] Для пар векторов $>$ далее означает $\geq \neq$, а $\gg$ — покомпонентно больше.

То есть Парето-оптимум — это такое состояние, в котором никто из участников не может увеличить свою целевую функцию без уменьшения целевой функции по крайней мере одного другого участника.

Определение 1.0.12 Ядром $\mathcal{C}$ *(обычным, слабым ядром) называется множество состояний неблокируемых никакой коалицией* $T \subset I$*, при обычном (слабом) определении блокирования:* T блокирует *вариант* $x \in X$ *если существует альтернатива* $\tilde{x}_i \in X_i$ $(i \in T)$ *такая, что все участники из* T *выигрывают по сравнению с* x*, т.е.* $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) \gg u_T(x)$ *— при любых действиях* x_{-T} *не входящих в коалицию* T *игроков.*[7]

Перейдем к утверждениям. Из данных определений непосредственно следует

Утверждение 1.0.1 *Ядро принадлежит слабой Парето-границе, а сильное ядро — сильной (обычной) Парето-границе:*

$$\mathcal{C}_s \subset \mathcal{P} \ , \ \mathcal{C} \subset W\mathcal{P} \ .$$

Некооперативные решения игр чаще всего оказываются не оптимальными по Парето, как станет ясно из примеров.

Без доказательства (см. Мулен) отметим условия существования и вложений определенных выше множеств.

Теорема 1 *(Нэш, 1951) Пусть для всех* $(i \in I)$ *все* X_i *компактны и выпуклы, все* $u_i(.)$ *непрерывны и вогнуты по* x_i*, тогда множество* $NE \neq \emptyset$*, компактно.*

Следствие 1.1 *Если все* X_i *конечны, то множество* $NE_m \neq \emptyset$*, компактно.*

Доказательство теоремы опирается на теорему о неподвижной точке применяемую к отображению отклика $\mathcal{F}$ определяемому ниже в (3).

Связь матричных игр с линейным программированием и нахождение NE_m. Доказательство Сл.1.1 для антагонистических (матричных) игр двух лиц можно проводить и независимо от теоремы Нэша, через линейное программирование, что дает также *способ поиска* NE_m для этих игр. Для этого задачу 1-го игрока записывают в форме максимизации (неизвестной ему заранее) цены игры μ_0 по переменным μ_0, μ, при ограничениях $\mu \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n_1} \mu^k = 1$, $\mu a^k \geq \mu_0$ $(k = 1, ..., n_2)$, где $a^k \in I\!R^{n_i}$ — столбцы матрицы платежей $(a_j^k) := (u_1(x_1^j, x_2^k))$. Здесь ограничения типа $\geq$ выражают гипотезу 1-го о неблагоприятном поведении противника (максимин). Легко проверить, что задача противника есть двойственная к описанной задаче. Таким образом симплекс методом можно найти седловую пару в игре G_m, она является и Нэшевской парой. Для случая биматричной игры 2×2 также легко найти NE_m графически, строя функции (или отображения) $NR_i(x_{-i})$ отклика игроков на действия партнеров.

Утверждение 1.0.2 [8] *1) Если все* X_i *конечны, то* $WSE \neq \emptyset$*. 2) В антагонистической игре двух лиц где все* X_i *конечны* $SE \subset Sad$*, и если* $SE \neq \emptyset$*, то у игры есть цена.*

[7]Сильным ядром $\mathcal{C}_s$ называется множество состояний, неблокируемых никакой коалицией при сильном блокировании (что означает $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) > u_T(x)$ вместо $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) \gg u_T(x)$ в определении блокирования).

[8]Более важная теорема Куна на эту тему касается игр в развернутой форме: из нее, в частности, следует, что в шахматах *есть* SE (оно пока неизвестно).

Утверждение 1.0.3 *Пусть все* X_i *компактны а* u_i *непрерывны, тогда 1)* $\mathcal{D} \cap MME \neq \emptyset, \mathcal{P} \neq \emptyset$*; 2) множества* $\mathbb{D}E, MME, NE$ *компактны,* $NE \subset NE_m$*; 3) если* $\mathbb{D}E \neq \emptyset$*, то* $MME \supset \mathbb{D}E = \mathcal{D} = Sad = SE \subset NE$ *,*

Доказательство утверждения (3) элементарно: поскольку доминирующие стратегии заведомо лучше остальных стратегий, то соответствуют и другим некооперативным решениям.

1.1 Примеры и способы поиска решений

Приведем пример игры в матричной форме где $\mathbb{D}E \neq \emptyset$.

Пример 1.1 "Дилемма заключенных" *(R.Luce, H.Raiffa,1957, Мулен).*

Двух человек арестовали по подозрению в совершении некоторого преступления. Судья предложил каждому следующую сделку. Если он сознается в преступлении, а другой нет, то сознавшийся получает 1 год наказания, а несознавшийся — 10 лет. Если сознаются оба, то каждый получит по 7 лет. Заключенным известно, что если никто из них не сознается, то оба получат по 3 года.

Игру можно представить с помощью следующей матрицы (Табл.2), в клетках которой слева вверху стоит выигрыш первого заключенного, а справа внизу — второго.

Таблица 2:

		Второй игрок: сознаться	Второй игрок: не сознаваться
Первый игрок	сознаться	-7 / -7	-1 / -10
	не сознаваться	-10 / -1	-3 / -3

Все рассмотренные нами виды некооперативных равновесий в этой игре совпадают, поскольку у каждого игрока имеется стратегия строго доминирующая все другие — сознаться. Действительно, худшее, что может получить заключенный, если сознается — 7 лет, если же не сознается, то 10 лет. Поэтому "осторожным" поведением для них будет сознаться. С другой стороны, каждому из них не выгодно изменять этот выбор, поскольку при этом он ухудшил бы свое положение. Поэтому это будет и равновесием по Нэшу. Если первому из заключенных предложили сделать свой выбор первым (он находится в положении лидера), то он, зная, что реакцией второго на любой его выбор будет признание, выберет наилучшее для себя — сознается. То есть равновесие Штакельберга будет там же. Сложное равновесие совпадает с равновесием в доминирующих стратегиях. Любой некооперативный исход выглядит парадоксально- неудачным: ведь если оба не сознаются, то оба получат меньшее наказание достигнув Парето-оптимумального $(u_1 = -3, u_2 = -3)$*. Но такая неоптимальность довольно типична для всех некооперативных решений в разных играх. Если же участники способны кооперироваться и верят в выполнение соглашения партнером, то достигают ядра* $(-3, -3)$*, входящего в Парето-оптимум.*

В подобных ("биматричных") играх с конечными множествами стратегий двух игроков осторожное равновесие практически ищется так: игрок выбирающий строки в каждой строке находит свой гарантированный выигрыш (то есть минимум в строке), а затем в качестве решения принимает строку или строки с максимальным гарантированным выигрышем. Аналогично поступает со столбцами игрок выбирающий столбцы.

Множество WSE ищется последовательным исключением из игры доминируемых строк и столбцов. Множество Нэшевских равновесий ищется перебором всех клеток; равновесия — это клетки из которых ни одному участнику не выгодно уйти путем смены стратегии.

Альтернативно, при нахождении равновесия по Нэшу, особенно в играх с непрерывными стратегиями, можно воспользоваться понятием функции отклика.

Отображение (многозначная функция) $\mathcal{F}_i(.)$ нэшевски- рационального отклика i-го участника на действия партнеров x_{-i} определяется как и ранее в виде:

$$\mathcal{F}_i(x_{-i}) := NR_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{-i})$$

Функция отклика показывает, как реагирует участник на действия партнеров. Тогда можно переформулировать определение NE так:

Точка $\bar{x}$ является равновесием по Нэшу т. и т. т., когда

$$\bar{x}_i \in \mathcal{F}_i(\bar{x}_{-i}) \quad \text{или} \quad \bar{x}_i = \mathcal{F}_i(\bar{x}_{-i}) \qquad \forall i \in I. \tag{3}$$

Здесь равенство — если функции $\mathcal{F}_i(.)$ являются однозначными, тогда нэшевское равновесие задается просто системой уравнений и соответственно вычисляется.

Найдем этим путем NE, StE в примере игры с непрерывными стратегиями.

Пример 1.2 *(Трудовое соглашение) Рассмотрим игру с двумя участниками — профсоюзом и фирмой. Профсоюз может устанавливать заработную плату (w) при ограничении $0 \le w \le 3$, а фирма — количество нанимаемых работников (l в тыс. чел.) при ограничении $0 \le l \le 1$. Профсоюз максимизирует следующую целевую функцию:*

$\nu(w, l) = wl - 2l^2,$

где $2l^2$ — издержки работы для членов профсоюза. Фирма максимизирует свою прибыль:

$\pi(w, l) = 2\sqrt{l} - wl.$

Найдем некоторые решения в этой игре.

1) Осторожное равновесие (MME). Оно не очень правдоподобно в рассматриваемой ситуации: ведь фирмы и профсоюзы обычно знают ходы друг друга; но найдем MME для примера. Самое худшее, что может сделать фирма с точки зрения профсоюза, — не нанять ни одного работника. При этом профсоюзу все равно, какую зарплату установить. С другой стороны, самое худшее, что может сделать профсоюз с точки зрения фирмы — установить максимальную зарплату. При этом фирма наймет столько работников, чтобы максимизировать

$\pi = 2\sqrt{l} - 3l.$

Находим максимум, приравняв производную этой функции по l к нулю:

$1/\sqrt{l} - 3 = 0.$

Таким образом, осторожное равновесие достигается при $l = 1/9$ и $0 \le w \le 3$. При этом $w = 3$ доминирующая стратегия профсоюза, а у фирмы таковых нет.

2) Равновесие по Нэшу (NE). При любом ненулевом количестве нанятых профсоюзу выгодно установить максимальную зарплату ($w = 3$). Поэтому его функция *отклика будет*

$$f(l) = 3.$$

Функция отклика фирмы получается из задачи максимизации прибыли по l:

$$g(w) = 1/w^2.$$

Решив систему уравнений $\{w = 3, \quad l = 1/w^2,\}$ *найдем Нэшевское равновесие* $(w, l) = (3, 1/9)$, *которое совпадает с одним из осторожных, поэтому является и седлом.*

3) Равновесие по Штакельбергу (StE) (лидер — профсоюз). Профсоюз знает функцию отклика фирмы, и подставляя ее в свою целевую функцию, максимизирует

$$\nu = wg(w) - 2g(w)^2 = 1/w - 2/w^4.$$

Очевидно, максимум достигается при уровне зарплаты 2, чему соответствует уровень занятости $g(2) = 1/4$.

4) Парето-оптимум ($\mathcal{P}$). Целевые функции участников квазилинейны по деньгам, поэтому Парето-оптимум можно найти как максимум суммы целевых функций. Эта сумма не зависит от величины заработной платы, поэтому количество нанятых во всех точках Парето-оптимума должно быть одинаковым: $\hat{l} = 1/\sqrt[3]{16}$. *Зарплата — любая из интервала* $0 \le w \le 3$. *Очевидно, что ни одно из перечисленных некооперативных равновесий не является Парето-оптимальным.*

5) Ядро ($\mathcal{C}$). Точки ядра не должны блокироваться ни одной коалицией: ни коалицией из обоих участников (т.е. должны принадлежать слабой Парето-границе), ни коалицией из одного участника (в качестве индивидуально достижимых выигрышей берем гарантированные минимаксные выигрыши). Т.о. ядро состоит из точек (l, w) *для которых выполняется:* $l = \hat{l}, \quad \nu = w\hat{l} - 2\hat{l}^2 \ge \nu(w, 0) = 0$ *и* $\pi = 2\sqrt{\hat{l}} - w\hat{l} \ge \pi(3, 1/9) = 1/3$.

2 Классические (совершенные) рынки

Перечислим наиболее важные черты, по которым рынок называют совершенным или классическим:

1) Отсутствие экстерналий: цели и физически допустимые множества каждого участника не зависят от поведения других участников.

2) Совершенство конкуренции: каждый участник считает себя не влияющим на цены (достаточно малым) и принимает их в каждый момент как заданные.

3) "Costless trade": влияние издержек сделок, налогов, и прочих видов "рыночного трения" несущественно, торговля свободна.

4) Совершенство информации: информация о ценах, свойствах товаров, допустимых множествах полна и определенна, выполнение заключенных сделок безусловно (нет неопределенности).

Совершенные или почти совершенные рынки редки, однако их анализ выявляет некоторые эффекты, общие для всех рынков, и предваряет анализ несовершенных. В теоремах благосостояния мы покажем, что совершенный рынок как механизм согласования интересов приводит участников к Парето-оптимальным исходам. В дальнейшем мы рассмотрим отдельно каждый из типов рыночных несовершенств 1) — 4) и связанные с несовершенствами отклонения равновесий от Парето- оптимальности, то есть так называемые "фиаско рынка" в ситуациях 1) экстерналий и общественных благ; 2) монополий и олигополий; 3) налогов и издержек сделок; 4) неопределенности, несовершенства информации.

2.1 Модели рынка. Равновесие.

Совершенная экономика (рынок) общего вида[9] моделируется как обобщенная некооперативная игра заданная параметрами

$$G := \langle I, X_I, u_I, \beta_I, w_I, J, Y_J \rangle \ , \tag{4}$$

где I, X_I , u_I имеют тот же смысл, что и в главе о теории игр, а прочие параметры вводятся ниже.

Далее $I := \{1, ..., m\}$ − множество потребителей, $J := \{1, ..., n\}$ − множество производителей (фирм), $K := \{1, ..., l\}$ − множество товаров (благ). Для описания состояния экономики используются следующие переменные: x_i^k − потребление i-м потребителем k-го блага ($k \in K$), y_j^k − производство j-м производителем k-го блага (отрицательные компоненты соответствуют затратам), p^k − цена k-го блага. Константа w_i^k означает начальный (до торговли) запас блага k у потребителя i.

Модель потребителя. Предпочтения потребителя $i \in I$ описываются его потребительской функцией (функцией полезности) $u_i(.)$, зависящей, в классическом случае, только от собственного потребления $x_i = \{x_i^k\}_{k \in K}$. Поведение потребителя моделируется как решение задачи максимизации функции полезности по x_i при ограничениях. А именно, потребление x_i должно принадлежать потребительскому множеству $X_i \subset I\!R^l$ ("физическое" ограничение, часто понимаемое просто как неотрицательность потребления: $X_i = I\!R_+^l$).[10]

Кроме того, выбор потребителя ограничен величиной его бюджета:
$px_i = \sum_{k \in K} p^k x_i^k \le \beta_i(.)$. Здесь $\beta_i(.)$ − функция дохода (бюджета) потребителя. Способ формирования дохода зависит от конкретного варианта экономики, например для экономики обмена $\beta_i(p, w_i) = pw_i$. Предполагается, что собственность w_i и цены определяются экзогенно. Другими словами, потребитель считает, что не влияет на цены и свою исходную (до торговли) собственность, принимая их как данные. Поэтому пока будем считать, что доходы заданы константой $\beta_i(.) = \beta_i$. Результат решения задачи потребителя, т.е. одно или множество его оптимальных решений − определяют отображение (т.е. многозначную функцию) спроса $\mathcal{X}_i(p, \beta_i)$. Она является "функцией отклика" на данные цены и доходы.

Запишем модель спроса потребителя формально:

$$\mathcal{X}_i(p, \beta_i) := \{\bar{x}_i \in X_i | \ u_i(\bar{x}_i) = \max_{x_i \in B_i(p)} u_i(x_i)\} \ , \tag{5}$$

где бюджетное множество $B_i(.)$ имеет вид:

$$B_i(.) := \{x_i \in X_i | \ px_i \le \beta_i(.)\} \ . \tag{6}$$

Оптимальные выборы потребителя во многих случаях удобно характеризовать при помощи теоремы Куна−Таккера (это вариант теоремы Лагранжа для ограничений − неравенств).

Прямая теорема Куна−Таккера [11] (необходимое условие оптимальности) в диф-

[9] Эта ключевая для современной теории рынков модель объясняет действие "невидимой руки рынка заставляющей "эгоистические интересы" участников работать на общее благо. Ее развитие принадлежит: A.Smith-1776, D.Rickardo-1817, L.Walras-1874,1883 , K.Arrow & G.Debreu-1953.

[10] В более общем случае, блага, которые создают потребители (например, труд) и потребляют в качестве производственных факторов фирмы представлены отрицательными компонентами вектора потребления $x_i \in X_i$.

[11] Точную формулировку можно найти у Маленво или в любом учебнике по мат.программированию. **Двусторонняя теорема Куна−Таккера без условий дифференцируемости** (необходимое и достаточное

ференциальной форме утверждает, что если $\bar{x}$ - это решение задачи

$$\phi(x) \to \max \tag{7}$$

$$\psi_r(x) \geq 0 \quad r = 1, ..., \hat{r} \tag{8}$$

и выполнено некоторое условие регулярности, например, что градиенты активных ограничений линейно независимы в $\bar{x}$, то найдутся неотрицательные числа $\lambda_r (r = 1, ..., \hat{r})$ — множители Лагранжа — такие, что производные Лагранжиана $L(\lambda, x) := \phi(x) + \sum_r \lambda_r \psi_r(x)$ по x равны нулю, причем если множитель λ_r строго положителен, то соответствующее ограничение выполнено как равенство (активно), а если r-е ограничение неактивно: $\psi_r(x) > 0$, то соответствующий множитель λ_r равен нулю (условие дополняющей нежесткости).

Обратная теорема Куна—Таккера (достаточное условие оптимальности) при условиях вогнутости всех функций $\phi(.)$, $\psi_k(.)$ утверждает, что если в допустимой точке $\bar{x}$ нашлись множители Лагранжа удовлетворяющие требованиям прямой теоремы (условиям первого порядка), то точка $\bar{x}$ оптимальна.

Для характеристики с помощью теоремы Куна—Таккера спроса участника $i \in I$ используем два условия.

Предположение 1 (ВЫПУКЛ)*. Множество X_i выпукло, а целевая функция $u_i(.)$ вогнута (т.е. $u_i(tx + (1-t)y) \geq tu_i(x) + (1-t)u_i(y)$ для $\forall t \in [0, 1], \forall x, y$), либо может быть превращена в вогнутую каким-либо монотонным (строго возрастающим) преобразованием.*

Поясним; поскольку монотонное преобразование целевой функции не влияет на выбор оптимальных точек (не изменяет форму линий уровня), то, например, функция $u(x, y) = xy$ и ее логорифм $v(x, y) = ln(u(x, y)) = ln(x) + \ln(y)$ эквивалентны в оптимизации, хотя первая не вогнута, а вторая вогнута и допускает поэтому применение теоремы К-Т. Следовательно, допускает его и первая, "приводимая к вогнутой". Чтобы исключить у функции свойство "приводимости к вогнутой" достаточно проверить отсутствие ее квазивогнутости. Квазивогнутость связана только с линиями уровня ф-ции $u(.)$, и означает, что для любой точки $\check{x}_i$ множество лучших чем $\check{x}_i$ точек $\{x_i \in X_i | \ u_i(x_i) \geq u_i(\check{x}_i)\}$ выпукло (эквивалентное определение квазивогнутости: $[u_i(tx + (1-t)y) \geq \min\{u_i(x), u_i(y)\}$ для $\forall x, y, \forall t \in [0, 1]$]). Квазивогнутость следует из вогнутости, поэтому неквазивогнутая функция не приводима к вогнутой монотонным преобразованием. Обратное не всегда верно, но среди решаемых в курсе примеров (кроме специально сконструированных) Вы не встретите квазивогнутую функцию не приводимую к вогнутой.

Предположение 2 (ГРАД)*. Точка индивидуально- рационального выбора потребителя $\bar{x}_i$ (называемая иногда индивидуальным равновесием потребителя) внутренняя ($\bar{x}_i \in int(X_i)$), причем в ней существует и больше нуля градиент $grad\ u_i(\bar{x}_i) \geq\neq 0$.*

Тогда ограничения $x_i \in X_i$ несущественны (тем самым единственное ограничение - бюджетное, и выполнено условие регулярности), и функция Лагранжа для задачи

$$u_i(x_i) \to \max_{x_i} ; \qquad px_i \leq \beta_i, \quad x_i \in X_i \tag{9}$$

условие оптимальности) при условиях вогнутости максимизируемой функции и вогнутости функций ограничений $\psi_k(x)$, а также наличия "внутренней" допустимой точки (т.е. точки $\hat{x}$ где все ограничения выполнены как строгие неравенства - "условие Слейтера") утверждает, что допустимая точка $\bar{x}$ является оптимумом тогда и т.т., когда она максимизирует без ограничений Лагранжиан с некоторыми $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \geq 0$, и выполнены условия дополняющей нежесткости.

равна $L = u_i(x_i) + \nu_i(\beta_i - px_i)$, где ν_i — множитель Лагранжа для бюджетного ограничения. Поэтому в оптимуме $dL/dx_i^k(\bar{x}_i) = 0\ \forall k$, откуда (здесь $\dot{u}_i^k$ — производная по товару k)

$$\dot{u}_i^k(\bar{x}_i) = \nu_i p^k\ (k \in K). \tag{10}$$

Делением подобных соотношений (не равных нулю) исключив ν_i, получим дифференциальную характеристику спроса $\bar{x}_i$ при любых фиксированных ценах p (т.е. индивидуальное равновесие потребителя при данных ценах):

$$p^k/p^s = \dot{u}_i^k(\bar{x}_i)/\dot{u}_i^s(\bar{x}_i)\ \ (k, s \in K). \tag{11}$$

Заметим, что если хоть одна производная $\dot{u}_i^k = 0$, то цена $p_k = 0$, иначе получаем противоречие с гипотезой внутреннего положения точки $\bar{x}_i$.

Отношение $\dot{u}_i^k/\dot{u}_i^s$ называют предельной нормой замещения (в потреблении) блага k на благо s. Таким образом, **в индивидуально- рациональной внутренней точке (равновесии потребителя) предельные нормы замещения благ равны отношению цен соответствующих благ**.

Это одно из условий первого порядка, т.е. необходимых условий максимума. Поскольку $grad\ u_i \geq\neq 0$ и условие $x \in X$ несущественно, то бюджетное огр. существенно, тогда из условий дополняющей нежесткости $(dL(\bar{x}_i, \nu_i)/d\nu_i = 0)$ получаем другое условие первого порядка:

$$px_i = \beta_i \tag{12}$$

Условия первого порядка (11), (12) задают систему уравнений, любое решение $\bar{x}$ которой при условии (ВЫПУКЛ) по обратной теореме К-Т является индивидуально- рациональным выбором (равновесием) потребителя при данных ценах. Тем самым, (11), (12) задают *функцию спроса*. Итак, имеем

Замечание 2.1.1 *Если при условиях* (ГРАД), (ВЫПУКЛ) *в задаче (9) пара* $\bar{x}_i \in X_i, \lambda \geq 0)$ *удовлетворяет условиям первого порядка (11), (12), то точка* $\bar{x}$ *есть равновесие потребителя при данных ценах и доходе; и обратно: всякое внутреннее равновесие потребителя удовлетворяет условиям первого порядка (11), (12).*

Для невнутренних точек сходные соотношения задающие спрос читатель может вывести сам, тоже пользуясь теоремой К-Т.

Модель производителя. При выборе объемов производства $y_j = \{y_j^k\}_{k \in K}$ каждая фирма $j \in J$ ограничена своим технологическим множеством $Y_j \subset I\!R^l$. Эти множества допустимых технологий можно задавать в частности в виде (неявных) производственных функций $f_j(y_j)$: $Y_j := \{y_j \in I\!R^l |\ f_j(y_j) \geq 0\}$. Другое удобное представление (когда производится только один товар h) — в виде явной производственной функции $y_j^h \leq g_j(y_j^{-h})$, где $y_j^{-h} := (y_j^k)_{k \neq h}$ — затраты (со знаком минус) всех других благ, необходимые для производства блага h. Чтобы привести этот случай к общему представлению Y через функции, достаточно записать $f_j(y_j) = -y_j^h + g_j(y_j^{-h}) \geq 0$.

В качестве целевой функции "классического" производителя берется его прибыль $\pi = py_j = \sum_{k \in K} p^k y_j^k$. В ситуации совершенной конкуренции производитель, как и потребитель, предполагает, что не может влиять на цены. Результатом решения задачи производителя — максимизации прибыли при технологических ограничениях — является (возможно, многозначная) функция предложения $\mathcal{Y}_j(.)$:

$$\mathcal{Y}_j(p) := \{\bar{y}_j \in Y_j |\ p\bar{y}_i = \max_{y_j \in Y_j} py_j\}. \tag{13}$$

Решение этой задачи также можно характеризовать при помощи теоремы Куна-Таккера. Используем два предположения.

Предположение 3 (ВЫПУКЛ). *Множества Y_j, $\forall j$ выпуклы и заданы вогнутыми производственными функциями в виде $f_j(y_j) \geq 0, \ \forall j$.*

Предположение 4 (ГРАД). *В проверяемой на индивидульную рациональность или на оптимум точке y_j существует и не равен нулю градиент $grad \ f_j(y_j) \neq 0$.*

Функция Лагранжа для соответствующей задачи (13) равна $L = py_j + \mu_j f_j(y_j)$, где μ_j — множитель Лагранжа для технологического ограничения. При условии $p \neq 0$ в точке максимума $\bar{y}_j$ выполняется $dL(\bar{y}_j)/dy_j^k = 0$, откуда $p^k = \dot{f}_j^k(\bar{y}_j)\mu_j$ $(\forall k \in K)$ (здесь и далее $\dot{f}_j^k$ — производная по товару k в точке $\bar{y}_j$). Рассматривая товары с ненулевыми ценами, заметим что $\mu_j \neq 0$, и исключив μ_j, получим дифференциальную характеристику точки равновесия производителя $\bar{y}_j$:

$$\text{если} \ \ p^{k_2} \neq 0 \ \ \text{то} \ \ p^{k_1}/p^{k_2} = \dot{f}_j^{k_1}(\bar{y}_j)/\dot{f}_j^{k_2}(\bar{y}_j) \ \ (k_1, k_2 \in K). \tag{14}$$

Отношение $\dot{f}_j^{k_1}/\dot{f}_j^{k_2}$ называют технологической предельной нормой замещения блага k_1 на благо k_2. Итак, в точке индивидуально- рационального выбора **(в "равновесии") производителя технологические предельные нормы замещения благ равны отношению соответствующих цен**.

Для производственной функции типа $f_j(y_j) = g_j(y_j) - y_j^h$ предельная норма замещения производимого блага h на другое (возможно, затрачиваемое) благо (k) равна $-1/\dot{g}_j^k$ (в этом виде ее называют также предельной производительностью блага k), и аналогичное соотношение принимает вид $-1/\dot{g}_j^k = p^h/p^k$.

Дополнительное условие первого порядка есть $f_j(\bar{y}_j) = 0$. Как и ранее, предположение (ВЫПУКЛ) гарантирует, что необходимые условия являются достаточными.

Часто производственное множество для фирмы, производящей один товар (h), удобно описать в терминах функции издержек $c(.)$. Это подразумевает максимизацию прибыли в задаче типа $y_j^h \leq g_j(y_j^{-h})$ в два этапа. На первом этапе для каждого возможного объема производства $\check{y}_j^h$ минимизируются издержки производства $\sum_{k \neq h} -p^k y_j^k$ (если $y_j^k < 0$ $k \neq h$, то это — затраты, а не выпуск, и минимизируется положительная величина) при ограничении $\check{y}_j^h = g_j(y_j^{-h})$. При этом цены p^{-h} всех товаров кроме h считаются фиксированными. В результате получается функция издержек

$c_j(\bar{y}_j^h, p^{-h}) := \arg\min_y(\sum_{k \neq h} -p^k y_j^k \mid \bar{y}_j^h = g_j(y_j^{-h}))$.

На втором этапе с учетом p^h максимизируют по $\check{y}_j^h$ прибыль, равную разности дохода и издержек $\pi_j = p^h y_j^h - c_j(y_j^k, p^{-h})$. В условиях совершенной конкуренции дифференциальную характеристику оптимума однопродуктовой фирмы в терминах функции издержек можно записать в виде $p_j^h = dc_j(y_j^h, p_{-h})/dy_j^h$, т.е. предельные издержки производства товара h равны его цене.

Теперь модели отдельных подсистем (участников) объединим в различные **модели рынка (экономики) в целом,** называемые иногда моделями общего равновесия (general equilibrium models).

Будем рассматривать следующие типы экономик.

1. *Экономика распределения.* В экономике распределения производство отсутствует. Имеются общие, нераспределенные, начальные запасы благ $w_{_\Sigma} \in I\!R^l_+$. Можно считать их производственным множеством состоящим из одной точки $Y := \{\bar{y}\} := \{w_{_\Sigma}\}$. Бюджетные множества задаются фиксированными денежными доходами $\beta_i(.) = d_i \geq$

0. Общее потребление в экономике не может превышать суммарный начальный запас благ: $\sum_{i\in I} x_i \le \bar{y} = w_{_\Sigma}$ (материальный баланс).

Представить себе экономику распределения можно следующим образом. Проводится аукцион l делимых товаров, суммарные запасы которых $w_{_\Sigma}$ находятся у аукционщика. Каждый участник $i \in I$ имеет намерение *полностью* потратить свой запас d_i денег (или ваучеров) на товары. Участники заявляют спрос и предложение, аукционщик отвечает ценами, они заявляют новый спрос (не обмениваясь, пока не наступит равновесие) и т.д. Об аукционщике (или естественной закономерности, которая выполняет его функции) предполагается, что он в момент t повышает с некоторой заданной скоростью реакции текущую цену $p^k(t)$ товара $k \in \{1, ..., l\}$, спрос на который оказывается выше предложения, и наоборот, понижает цены избыточных товаров. Этот процесс называют "нащупыванием" равновесия рынка (фр. tatonement). Если он завершается стационарной точкой $\bar{p}$ [12] (это возможно лишь когда спрос окажется равен предложению), то этот исход естественно называть *равновесием*. Нами это понятие вводится ниже без связи с процессом поиска, просто как состояние рынка, где спрос согласован с предложением.

2. *Экономика обмена*. Здесь также нет производства. Каждый потребитель обладает фиксированными индивидуальными начальными запасами товаров $w_i \in I\!R^l_+$, и этими товарами потребители обмениваются на рынке. Бюджет потребителя задается функцией $\beta_i(p) = pw_i$. Выполняется материальный баланс

$$\sum_{i\in I} x_i \le \sum_{i\in I} w_i$$

Представить экономику обмена можно в двух вариантах, обе ситуации описываются той же моделью. (Вариант I) Та же ситуация аукциона, но начальные запасы товаров w_i (в том числе деньги, их не обязательно тратить) исходно распределены между участниками, которые обмениваются сообщениями о желаемом при каждых ценах спросе, аукционщик (или естественная закономерность) меняющий цены лишь помогает участникам договориться, меняя цены в процессе *tatonnement*. Фактический обмен товарами происходит лишь после установления цен равновесия.

(Вариант II) Это неизменная по технологиям (технологии учтены в допустимых множествах X_i участников) и потребностям экономика, где каждый день у каждого участника $i \in I$ возобновляются (например, труд, земля, капитал) начальные запасы w_i; если он их сегодня не продаст и не потребит, они не накапливаются (вчерашний день труда не продашь сегодня). Процесс *tatonnement* направляется естественной закономерностью. Равновесие (оно может и не установиться) понимается как стационарные (изо дня в день) цены и объемы продаж.

3. *Экономики общего вида и Эрроу-Дебре.* Экономика общего вида включает как производство, так и потребление. Потребители владеют фиксированными начальными запасами товаров w_i, и долями γ_{ij} в прибылях фирм. Бюджеты потребителей задаются функциями

$$\beta_i(p, y) = pw_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij} py_j + d_i,$$

где $\gamma_{ij} \in [0, 1]$ — фиксированные коэффициенты участия потребителя i в прибылях фирм $j \in J$, а d_i — фиксированные "дополнительные" денежные доходы; вариант когда $d_i = 0$ $(i \in I)$ называют моделью Эрроу-Дебре. Потребление не превышает суммы начальных запасов и произведенной продукции:

$$\sum_{i\in I} \bar{x}_i \le \sum_{i\in I} w_i + \sum_{j\in J} \bar{y}_j.$$

Интерпретация равновесия такая же, как в варианте II модели обмена.

Таким образом, задавая различный вид $\beta_i(.)$, мы задали три частных модели, от-

[12] Такую точку А.Смит и Д.Рикардо называли естественной ценой или стоимостью.

ражающих различные варианты распределения исходной собственности, и общую модель (заметим, возможны и иные варианты функций доходов $\beta_i(.)$ — при учете налогов, и др).

Дадим определение общего рыночного равновесия для общей модели экономики, определение подходит и для экономик Эрроу-Дебре, распределения и обмена, с очевидными упрощениями.

Определение 2.1.1 Вальрасовское равновесие *(Вальрасовское полуравновесие)*[13] *есть такой набор $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$, что выполняются условия:*

1) индивидуальная рациональность решений $(\bar{x}, \bar{y})$ при ценах $\bar{p}$, т.е.

$$\bar{x} \in \mathcal{X}(\bar{p}), \bar{y} \in \mathcal{Y}(\bar{p}). \tag{15}$$

2) материальная полусбалансированность:

$$\sum_{i \in I} \bar{x}_i \leq \sum_{i \in I} w_i + \sum_{j \in J} \bar{y}_j \ , \tag{16}$$

3) закон Вальраса (аналог "дополняющей нежесткости"):

$$\bar{p}(\sum_{i \in I} \bar{x}_i - \sum_{i \in I} w_i - \sum_{j \in J} \bar{y}_j) = 0 \ . \tag{17}$$

Множество Вальрасовских равновесий обозначим $WE(d, w, \gamma)$.
Если в состоянии $(\bar{x}, \bar{y})$ баланс (16) выполнен как равенство, то набор $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ назовем строгим Вальрасовским равновесием, *обозначив $WE_=(d, w, \gamma)$ соответствующее множество.*

К равновесиям общей модели мы будем применять обозначение $WE(d, w, \gamma)$, указывая таким образом параметры распределения собственности, к равновесиям экономики "распределения" — $WE(d)$, "обмена" — $WE(w)$, Эрроу-Дебре — $WE(w, \gamma)$.

Определение 2.1.2 Частное (частичное) равновесие *(Partial Equilibrium) для рынка одного из товаров k при ценах $\bar{p}$ есть набор $(\bar{x}, \bar{y})$, такой, что выполнено условие индивидуальной рациональности (15) и баланс (16) по этому товару k (прочие балансы не учитываются), множество соответствующих частных равновесий обозначим $PE^k(\bar{p})$.* [14]

Сопоставляя концепции WE и NE, отметим, что если исходные данные рынка $\langle I, X, u, J, Y, d, w, \gamma \rangle$ естественным образом записать как обобщенную игру в нормальной форме G (включив аукционщика регулирующего цены в число участников), то ее Нэшевские равновесия совпадут с Вальрасовскими. Таким образом WE есть NE в обобщенной игре специального вида.

Доказательство *теорем существования* WE, вложения $WE \subset \mathcal{C}$ и обратного вложения, верного для бесконечно большого числа участников, выходит за пределы данного курса [15]. Укажем лишь, что важными условиями существования являются выпуклость допустимых множеств и квазивогнутость целевых функций, иначе спрос

[13] Его также называют общее рыночное равновесие (General equilibrium), отличая от "частного" или "частичного" равновесия на рынке только одного из товаров (Partial equilibrium).

[14] Строго говоря, называть "частное" р-е равновесием трудно, т.к. балансы прочих благ могут не выполняться, но такова традиция.

[15] Это изучалось на 2 курсе в лекциях "Математическая экономика см. также Экланд.

может допускать скачки и равновесие не только не устанавливаться, но и не существовать. Теоремы же устойчивости (сходимости к равновесию) процесса tatonnement (см. Маленво, гл.5, стр.149), описываемого диф. уравнением

$$(\mathrm{d}p^k(t)/\mathrm{d}t) = \alpha^k(\sum_i(x_i(t) - w_i) - \sum_j y_j(t)\ ). \tag{18}$$

— требуют еще дополнительных условий кроме квазивогнутости.

Равновесие может быть *не единственным*, однако, за исключением вырожденных случаев, равновесий обычно конечное, притом нечетное число (более точно, см. напр. Экланд). Это можно понять из геометрии функций спроса; а также из раздела по вычислению равновесий.

2.2 Парето-оптимальные состояния экономики и теоремы благосостояния, дифференциальная характеристика оптимума

Везде в дальнейшем мы будем рассматривать только "физически" возможные состояния экономики, т.е. такие, для которых $x_i \in X_i \quad \forall i \in I$, $y_j \in Y_j \quad \forall j \in J$ и выполнены материальные балансы (16).

Определение 2.2.1 Парето-оптимумом *экономики называется такое возможное состояние* $(\hat{x}, \hat{y})$, *что не существует альтернативного возможного состояния* (x, y), *дающего лучший вектор полезностей* $(u_i(x_i))_{i\in I} \geq\neq (u_i(\hat{x}_i))_{i\in I}$.

Парето-оптимальность означает, что нельзя найти Парето-улучшения, т.е. повысить благосостояние одного потребителя, не уменьшая благосостояния других.

Замечание 2.2.1 *Для того, чтобы точка* $(\hat{x}, \hat{y})$, *была Парето-оптимальной в экономике общего вида, необходимо и достаточно, чтобы она являлась для любого* $i_0 \in \{1, ..., m\}$*) решением оптимизационной задачи вида*

$$u_{i_0}(x_{i_0}) \to \max_{x\in X, y\in Y} \tag{19}$$

$$u_i(x_i) \geq \hat{u}_i = u_i(\hat{x}_i) \quad (i \in I \setminus \{i_0\}), \tag{20}$$

$$f_j(y_j) \geq 0 \quad (j \in J) \tag{21}$$

$$\sum_i x_i^k \leq \sum_i w_i^k + \sum_j y_j^k. \tag{22}$$

В справедливости замечания легко убедится прямо по определению.

Предполагается, что читатель знаком с доказательством теоремы $WE \subset \mathcal{P}$, и обратной к ней, для экономики обмена (для непрерывных строго монотонных функций полезности и потребительских множеств $X_i = I\!R^l_+$). Теперь займемся случаем с производством.

Убедимся, что если рынок совершенен, то 1) равновесные планы потребления и производства Парето -оптимальны (невозможно "фиаско рынка"), и 2) обратно: любого Парето -оптимума можно достичь используя рыночный (ценовой) механизм, и не прибегая к другим средствам достижения согласованного состояния (типа переговоров, правил голосования, государственного регулирования производства и потребления и проч.); все Парето-оптимальные состояния достижимы различными распределениями исходной собственности.

Предположение 5 (НЕНАСЫЩ1)*: Для каждого участника $i \in I$ целевая функция u_i локально ненасыщаема на потребительском множестве X_i, то есть для любой точки $x_i \in X_i$ и любой ее окрестности $V(x_i)$ найдется альтернативная допустимая точка $\tilde{x}_i \in V(x_i) \cap X_i: \quad u(\tilde{x}_i) > u(x_i)$).*

В частности, для локальной ненасыщаемости достаточно, чтобы в каждой точке x_i ф-я u_i строго возрастала хотя бы по одному неотрицательному направлению $\Delta x_i \in \mathbb{R}^l_+$ (отсюда название "ненасыщаемость"), а потребительское множество X_i всюду было неограничено сверху в смысе $X_i = X_i + \mathbb{R}^l_+$.

Теорема 2 *(*ТБ1 **для** $WE(d,\omega,\gamma)$**).** *Пусть $(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$ — Вальрасовское равновесие совершенного рынка общего вида, и выполнено предположение* (НЕНАСЫЩ1), *тогда $(\bar{x},\bar{y})$ — Парето-оптимально. Т.е.:*

$$(\mathtt{НЕНАСЫЩ1})\&[(\bar{p},\bar{x},\bar{y}) \in WE(d,\omega,\gamma)] \Rightarrow (\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{P} \ . \tag{23}$$

Докажем 1-ю и 2-ю теоремы благосостояния для случая экономики распределения, оставив доказательства для экономики обмена и Эрроу-Дебре как упражнения, проводимые по той же схеме.

Док-во ТБ1 **для** $WE(d)$**.** Предположим противное: есть другое допустимое состояние $(\hat{x},\hat{y})$, лучшее в смысле Парето, то есть такое, что $u(\hat{x}) \geq\neq u(\bar{x})$. Обозначим $t \in I$ того участника, для кого состояние $\hat{x}$ строго лучше: $u_t(\hat{x}) > u_t(\bar{x})$.

1) Покажем, что лучший набор дороже, чем нужно, чтобы удовлетворять бюджетному ограничению (6), т.е. $\bar{p}\hat{x}_t > d_t$. Действительно, в противном случае точка $\hat{x}_t$ принадлежала бы бюджетному множеству потребителя: $\hat{x}_t \in B_t(\bar{p},d)$ — в задаче (15), но она предпочтительнее для него чем $\bar{x}_t$, следовательно $\bar{x}_t$ не могло бы быть им выбрано, что противоречит равновесности $\bar{x}$. Итак $\bar{p}\hat{x}_t > d_t$.

Аналогично для прочих участников $\bar{p}\hat{x}_i \geq d_i \ (i \in I)$. Действительно, в противном случае в соответствии с условием (НЕНАСЫЩ1) альтернативный удовлетворяющий ограничениям набор $\hat{x}_i \in X_i, \ p\hat{x}_i \leq d_i$, такой, что $u_i(\hat{x}_i) > u_i(\hat{x}_i)$, что противоречило бы, опять, равновесности $\bar{x}_i$.

Суммируя полученные неравенства имеем оценку

$$\sum_i \bar{p}\hat{x}_i > \sum_i d_i \ . \tag{24}$$

2) С другой стороны, в точке равновесия бюджетные ограничения (6) выполняются: $\bar{p}\hat{x}_i \leq d_i$. Суммируя по i и привлекая оценку (24) имеем

$$\sum_i \bar{p}\hat{x}_i > \sum_i d_i \geq \sum_i \bar{p}\bar{x}_i \ . \tag{25}$$

3) Однако точка $\hat{x}$ предполагалась допустимой, что означает выполнение баланса $\sum_i \hat{x}_i \leq w_{_\Sigma}$. Умножая это векторное неравенство на неотрицательный вектор цен $\bar{p}$ и пользуясь условием дополняющей нежесткости (17) (законом Вальраса) получим оценку, противоречащую (25):

$$\sum_i \bar{p}\hat{x}_i \leq \bar{p}w_{_\Sigma} = \sum_i \bar{p}\bar{x}_i \ . \tag{26}$$

Теорема доказана. ▥

Отметим, что для экономики Эрроу-Дебре можно изменить завершение доказательства, исключив пункт 2) и сравнив непосредственно правые части бюджетов

$\sum_i \beta_i(.) = \sum_i(\bar{p}w_i + \sum_j \gamma_{ij}\bar{p}\bar{y}_j) \geq \sum_i(\bar{p}w_i + \sum_j \gamma_{ij}\bar{p}\hat{y}_j)$, с тем же результатом (проверяя, что в равновесии бюджеты выполнены как равенства). Однако требуется еще проверка того, что $\sum_{j\in J} \bar{p}\check{y}_j \leq \sum_{j\in J} \bar{p}\bar{y}_j$, что вытекает из условий равновесия производителей.

Перейдем к доказательству того, что всякую Парето-оптимальную точку можно реализовать как равновесие подбором распределения доходов или собственности.

Предположение 6 (ВЫПУКЛ). *Для всех $i \in I$ множества X_i выпуклы, а функции полезности u_i вогнуты,*[16] *т.е. $u_i(tx + (1-t)y) \geq tu_i(x) + (1-t)u_i(y)$ для $\forall t \in [0,1]$ $\forall x, y$. Производственные множества Y_j $\forall j$ выпуклы.*

Предположение 7 (ГРАД). *Проверяемая на оптимальность точка $(\hat{x}, \hat{y})$ внутренняя (т.е. $\hat{x}_i \in int(X_i)$, $\forall i \in I$), причем в ней существует градиент $grad\ u_i(\hat{x}_i) \geq\neq 0$, $\forall i$. Производственные множества представлены производственными функциями в виде $Y_j := \{y_j |\ f_j(y_j) \geq 0\}$, функции дифференцируемы и $grad(f(\hat{x})) \neq 0$.*

Введенные упрощающие условия (ГРАД) для ТБ2 на самом деле избыточны. Во-первых, дифференцируемость может быть отброшена. Во-вторых, неотрицательность $grad\ u_i \geq 0$ вытекает из $\hat{x}_i \in int(X_i)$. В-третьих, это условие на внутренность может быть ослаблено, так что (ГРАД) в целом можно заменить таким легким условием: [Пусть $K_+ -$ множество товаров, по которым целевая функция возрастает в точке $\hat{x}$ хотя бы у одного участника. Тогда либо 1)найдется участник, для которого $X_i \supset I\!R^l_+$ & $\hat{x}^k_i > 0$ $\forall k \in K_+$, либо 2)у каждого участника целевые функции строго возрастают по товарам $\forall k \in K_+$.] ("ресурсная связность"). Читатель может проверить справедливость этого усиления теоремы ТБ2 пользуясь вариантом теоремы К-Т без дифференцируемости.

Теорема 3 *(*ТБ2 **для** $WE(d, w, \gamma)$*.) Пусть дано Парето -оптимальное состояние $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{P}$ экономики общего вида с параметрами $\bar{w}$, и выполнены* (ВЫПУКЛ), (ГРАД), *тогда найдется распределение собственности $(d, w, \gamma) \geq 0$ и цены $p \in I\!R^l_+$, такие что $\sum_{i\in I} \gamma_{ij} = 1$ $(j \in J)$, $\sum_{i\in I} w_i = \sum_{i\in I} \bar{w}_i$, и $(p, \hat{x}, \hat{y})$ − Вальрасовское равновесие, то есть*

$$(\text{ВЫПУКЛ})\&(\text{ГРАД})\&[(p, x, y) \in \mathcal{P}] \Rightarrow \exists(p, d, w, \gamma):\ (x, y) \in WE(d, \omega, \gamma).$$

При этом распределение собственности может быть выбрано пропорциональным в том смысле, что $\exists\theta \in I\!R^n_+ :\ [d_i = \theta_i d_{_\Sigma},\ w_i = \theta_i w_{_\Sigma},\ \gamma_{ij} = \theta_i\ (\forall j)]\ (i \in I)$.

Докажем теорему только для случая экономики распределения, оставив доказательства для экономики обмена и Эрроу-Дебре как упражнения.

Док-во ТБ2 **для** $WE(d)$**.** 1) Как отмечено выше в Замечании 2.2.1, точка $\hat{x}$ может быть Парето -оптимальной тогда и только тогда, когда она является решением m оптимизационных задач (для $s = 1, ..., m$) вида (19) переформулируемых для случая экономики распределения так:

$$u_s(x_s) \to \max_{x\in X}\ ; \tag{27}$$

$$u_i(x_i) \geq \hat{u} = u_i(\hat{x}_i) \quad (i \in I \setminus \{s\}), \tag{28}$$

$$\sum_i x^k_i \leq y^k = w^k_{_\Sigma}\ (k \in K). \tag{29}$$

2) Для применимости к задаче (27) теоремы Куна-Таккера нужно проверить, что все "активные" ограничения (т.е. выполняющиеся в точке $\hat{x}$ как равенства) линейно независимы. Это проводится проверкой ранга матрицы градиентов ограничений,

[16] Как и выше, на самом деле достаточно требовать "приводимость к вогнутости".

используя условие (ГРАД): выписав структуру матрицы, нужно убедиться что если линейная комбинация ее строк равна нулю, то все коэффициенты нулевые. Мы здесь опускаем эту проверку (см. Маленво).

3) Применив к (27) теорему Куна-Таккера, получим что существуют множители Лагранжа $\lambda_i \geq 0,\ i = 1,..,m$ для ограничения (28) и множители $\sigma^k \geq 0,\ k = 1,..,l$ − для условия (22) такие что:

$$\lambda_i \dot{u}_i^k(\hat{x}_i) - \sigma^k = 0 \ \ (i \in I, k \in K). \tag{30}$$

Здесь принято обозначение $\dot{u}_i^k(\hat{x}_i) := \partial u_i / \partial x_i^k$, а также $\lambda_s := 1$. Отсюда, из $\lambda_s = 1$, $grad\ u_s \geq\neq 0$ следует что вектор $\sigma \geq\neq 0$, следовательно все $\lambda_i > 0$ $(i \in I)$ в этой системе равенств.

4) Возьмем оптимальные оценки товаров σ в качестве цен: $p := \sigma \in I\!R^l$, а в качестве доходов требуемых в теореме — ровно столько сколько требуется для приобретения Парето-оптимального набора: $d_i := p\hat{x}_i$. Проверим, равновесие ли мы получим.

Покажем, что $\hat{x}$ − равновесие потребителей при p, d, т.е. решение задачи (9) при этих ценах и доходах. Бюджетное ограничение (12) выполнено. Взяв $\nu_i = 1/\lambda_i$ (используем $\lambda_i > 0$, (30)), заметим, что при ценах $p = \sigma$ множители Лагранжа ν_i и точка оптимума $\hat{x}_i$ удовлетворяют соотношениям (10). Следовательно при выполнении предположения (ГРАД) для точки $\hat{x}$ выполнены необходимые условия первого порядка. При условиях (ВЫПУКЛ), (ГРАД) необходимые условия являются и достаточными условия экстремума, итак $\hat{x}_i \in \mathcal{X}_i(p, d_i)$ $(i \in I)$.

Другое требование определения "равновесия" − полусбалансированность − вытекает из допустимости Парето-оптимальной точки $\hat{x}$, а третье требование − закон Вальраса − следует из дополняющей нежесткости условий Куна-Таккера для задачи (27). Действительно, если оценка $p^k = \sigma^k$ какого-то товара $\hat{k}$ положительна, то ограничение (баланс) по нему выполнено как равенство, что и означает (17).

Теорема доказана. ▥

Отметим, что для экономики Эрроу-Дебре в доказательстве необходимо еще проверить индивидуальную рациональность плана производства $\hat{y}$, а также поделить совокупную собственность (w, γ) так, чтоб индивидуальные доходы $\beta_i(w, p, \gamma)$ равнялись найденным числам $(p\hat{x}_i)$, то есть были точно достаточны для потребления $\hat{x}$. Для этого достаточно поделить собственность пропорционально числам $\theta_i = (p\hat{x}_i / \sum_{j \in I} p\hat{x}_j)$.

Важно для дальнейших теорем, что из условий типа (30) мы получаем *дифференциальную характеристику Парето-оптимальной точки* в виде совпадения (в условиях теоремы) предельных норм замещения любых двух товаров k, t для всех участников:

$$\sigma^k / \sigma^t = \dot{u}_i^k(\hat{x}) / \dot{u}_i^t(\hat{x}) \ (i \in I), \qquad \sigma^k / \sigma^t = \dot{f}_j^k(\hat{y}) / \dot{f}_f^k(\hat{x}) \ (j \in J).. \tag{31}$$

Сутью теорем ТБ1−ТБ2 является то, что эта диф. характеристика оптимума для совершенных рынков совпадает с дифференциальной характеристикой равновесия: поскольку цены для всех одинаковы, то *отношение предельных норм замены двух товаров одинаково для всех участников и равно отношению цен.*

2.3 Вычисление равновесий и Парето-оптимальных состояний, пример

Предположим, в экономике обмена нам известны целевые функции u_i начинающих торговлю участников и их начальные запасы w_i. Можно ли предсказать, чем закончится обмен?

Прежде всего, используя условие (15), по оптимизационным задачам вида (5) нужно построить функции (или отображения) спроса $\mathcal{X}_i$. Если множество X_i выпукло а функция цели строго вогнута, то $\mathcal{X}_i(p)$ окажется однозначной функцией. В экономике обмена эта функция однородна степени 0 по ценам p, поэтому цены можно произвольно нормировать, например, приняв $p^1 = 1$, и искать только $l-1$ равновесных цен $\bar{p}^2, ..., \bar{p}^l$.

Если для каждого продукта k есть желающий его участник $i : \partial u_i/\partial x_i^k > 0$, то естественно искать строгое равновесие, то есть такое, где все цена положительны и балансы (16) — равенства. Из балансов и функций спроса получаем систему l уравнений с l неизвестными $p_1, ..., p_l$, записываемую в векторной форме так: $\sum_I(\mathcal{X}_i(p) - w_i) = 0$.

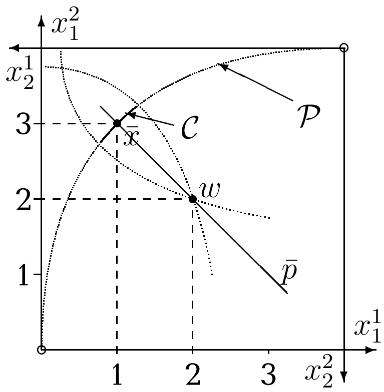
Эти уравнения окажутся линейно зависимы, поскольку умножая их на вектор цен получим тот же закон Вальраса (17), что и при суммировании по i бюджетов (6), выполняемых как равенства (при ненасыщаемости). Таким образом, можно решать систему любых $l-1$ уравнений из набора, определяя $l-1$ неизвестных равновесных цен $\bar{p}^2, ..., \bar{p}^l$. Равновесные объемы спроса находим затем как $\bar{x} = \mathcal{X}(\bar{p})$.

Другой (удобный графически) поход к нахождению равновесия, если выполнены соответствующие предположения, состоит в использовании дифференциальной характеристики равновесия и ТБ2 (равновесие должно лежать на Парето-границе). Получаем $n \times (l-1)$ уравнений относительно неизвестных $(p_1, ..., p_l), (x_i^1, ..., x_i^l)_I$. Добавив к ним n бюджетных ограничений, получим ту же (разрешимую) систему уравнений, что и при первом способе. Этот путь особенно выгоден, когда предельная норма замещения на Парето-границе постоянна.

Для экономики распределения и экономики с производством рассуждения аналогичны. Случаи неоднозначности спроса, граничные, и др. требуют дополнительных рассуждений, не слишком сложных.

Пример 2.1 *("Ящик Эджворта"). Рассмотрим экономику обмена, состоящую из двух потребителей и двух благ. Потребители имеют функции полезности типа Кобба -Дугласа:* $u_1 = \ln x_1^1 + 3\ln x_1^2$ *и* $u_2 = 3\ln x_2^1 + \ln x_2^2$. *Начальные запасы благ у них одинаковы и равны* $w_1 = w_2 = (2, 2)$.

Рис. 1: Ящик Эджворта



Проверив, что условия ТБ1, ТБ2 выполнены, найдем предельные нормы замещения первого блага на второе для внутренних точек Парето: $\dot{u}_1^1(\hat{x})/\dot{u}_1^2(\hat{x}) = x_1^2/(3x_1^1)$ *и* $\dot{u}_2^1(\hat{x})/\dot{u}_2^2(\hat{x}) = 3x_2^2/x_2^1$. *В Парето-оптимуме нормы равны друг другу, что дает уравнение* $x_1^2 x_2^1 = 9x_1^1 x_2^2$. *Должны также выполняться материальные балансы* $x_1^1 + x_2^1 = 4$ *и* $x_1^2 + x_2^2 = 4$. *Получаем уравнение Парето-границы:* $x_1^2 = 9x_1^1/(1 + 2x_1^1)$.

В равновесии предельная норма замещения для каждого потребителя должна быть равна отношению цен. Учитывая бюджеты и материальные балансы, получим равновесие $x_1 = (1, 3)$, $x_2 = (3, 1), p = (1, 1)$.

Ядро в этой экономике — это те точки Парето-границы, в которых функция полезности ни одного из участников не ниже, чем в точке начальных запасов. Таким образом, крайние *точки ядра должны удовлетворять соотношениям:* $u_1 = \ln x_1^1 + 3\ln x_1^2 \geq u_1(2,2) = 4\ln 2$, $u_2 = 3\ln x_2^1 + \ln x_2^2 \geq u_2(2,2) = 4\ln 2$ *и* $x_1^2 = 9x_1^1/(1+2x_1^1)$.

3 Экстерналии

Приведенные теоремы благосостояния выясняют оптимальность "классических" (совершенных) рынков. Если ослабить условия этих теорем, то рынок без координации или регулирования может иметь неэффективные равновесия. Рассмотрим одно из "несовершенств" — экстерналии (внешние влияния).

3.1 Проблема экстерналий

Определение 3.1.1 *Говорят, что имеют место* внешние влияния в потреблении *или, иначе,* экстерналии в потреблении, *если функции полезности* u_i *и/или допустимые множества* X_i *потребителей зависят от решений других участников:* $u_i = u_i(x, y)$, *или* $X_i = X_i(x_{-i}, y)$ *(мы второй случай далее не рассматриваем).*

Говорят, что имеют место внешние влияния (экстерналии) в производстве, *если производственные множества* Y_j *фирм зависят от решений других участников:* $Y_j = Y_j(y_{-j}, x)$; *если производственные множества заданы производственными функциями* f_j, *то наличие экстерналий выражается в виде* $f_j = f_j(y_j, y_{-j}, x) \geq 0$.

"Отрицательными" внешними влияниями (участников друг на друга) являются, например, громкая музыка, курение, загрязнение окружающей среды. Есть и примеры положительных внешних влияний. Например, если сад и пасека расположены рядом, то пчелы опыляют сад, и садовод собирает больший урожай, а пчеловод получает больше меда. В определенном смысле общественные блага, которым посвящена следующая глава — это частный случай экстерналий, а именно такой, когда влиянию подвергаются *все* участники экономики.

Если участники ситуации с экстерналиями способны без издержек измерять уровень влияний, установить, охранять и контролировать права собственности на них (право наносить влияния либо право не подвергаться влиянию, или др.), способны к переговорам, то обычно они достигают Парето-оптимального соглашения по координированию экстерналий (см. теорему Коуза ниже). В противоположном случае часто возникает "фиаско рынка", то есть неоптимальность по Парето возникающего некоординируемого равновесия. В случае отрицательных влияний это "фиаско" проявляется в избыточности деятельности, порождающей экстерналии, и обратно, при положительных влияниях они обычно недостаточны по сравнению с оптимальными.

Чтобы пояснить этот эффект рассмотрим сначала пример *частного (частичного) равновесия*[17] без координации экстерналий.

Пример 3.1 ("Трагедия общины")[18]. *Пусть каждый из* m *игроков - крестьян* $i \in \{1, ..., m\}$ *выбирает объем выпаса* $y_i \geq 0$ *своих коров на общественном лугу. Все коровы одинаковы, поэтому надой молока каждого есть просто* (y_i/y_Σ)*-ая доля от "надоя со всего стада"* $f(y_\Sigma)$, *где* $f(.)$ *— производственная функция зависящая от суммарного выпаса* $y_\Sigma := \sum_i y_i$. *Предполагается, что первая и вторая производные всюду* $\dot{f}(.) > 0$, $\ddot{f}(.) < 0$, *что отражает убывающую эффективность (истощение луга). Пусть цена*

[17] Это означает, что участники не влияют на цены: они "малы" относительно экономики в целом.

[18] См. David Hume,1790 (?).

молока равна p, удельные издержки содержания и выпаса коров равны 1 (предполагается, что объем выпаса измерен в издержках), тогда индивидуальная прибыль i-го участника при стратегии y_{-i} прочих участников равна

$$\pi_i(y_i, y_{-i}) = (p \cdot y_i \cdot f(y_i + y_{-i}))/(y_i + y_{-i}) - y_i.$$

Если же вести выпас как единое предприятие, то совокупная прибыль будет

$$\pi = pf(y_{\Sigma}) - y_{\Sigma}.$$

Покажем, что если количество крестьян $m > 1$, то свободный доступ к общинному лугу ведет к не Парето-оптимальному, конкретно — к избыточному выпасу ("тенденция к избыточности использования общих благ" [19]).

Действительно, например[20] при $f(\cdot) = \sqrt{\cdot}$ совокупный объем выпаса окажется, как легко проверить максимизируя индивидуальную прибыль и находя NE, равным $p^2(1 - 1/(2m))^2$, в то время как максимум общей прибыли достигается при меньшем объеме $p^2/4$. Это объясняется тем, что когда крестьянин максимизирует свою прибыль ($\partial\pi_i/\partial y_i = 0$), он не учитывает своего отрицательного влияния на прибыль других ($\partial\pi_j/\partial y_i < 0, \quad i \neq j$). В результате в точке равновесия $\partial\pi/\partial y_i = \sum_j \partial\pi_j/\partial y_i < 0$. Крестьянин мог бы увеличить общую прибыль, используя луг менее интенсивно, но он ориентируется только на свою прибыль.

Продемонстрированная проблема "избыточности" вредных влияний носит весьма общий характер и встречается в ситуациях загрязнения среды, совместного использования всех видов общих ресурсов (дорог, мест отдыха, ...) и др.

Это же явление с обратным знаком — "тенденция к недостаточности" деятельности, дающей положительные внешние эффекты. Например, если стремящийся к чисто личной выгоде колхозник или член бригады получает просто долю общей прибыли и не контролируем, то его усилия, при естественных предположениях, окажутся ниже оптимальных.

Как можно видеть из рассмотренного примера, ключевая причина неоптимальности в ситуациях с экстерналиями — игнорирование при нескоординированных индивидуальных решениях выгоды или вреда, приносимого другим субъектам. Ниже мы рассмотрим различные способы коррекции неоптимальных равновесий. В частности, фиаско рынка с "общим благом" исчезнет, если некоторым образом распределить права собственности. Например, крестьяне могут договориться об изначальных квотах выпаса (например, поровну от оптимального объема) и затем продавать квоты друг другу.

Теперь рассмотрим *общее равновесие* с экстерналиями в производстве и потреблении и убедимся, что тот же эффект неоптимальности имеет место и в этих ситуациях.

3.2 Модель экономики с экстерналиями и теоремы неэффективности

Модель экономики общего вида с экстерналиями аналогична соответствующей модели совершенного рынка, только целевые и производственные функции в ней зависят уже от всех переменных экономики:

$$u_i = u_i(x, y) \ (i \in I), \qquad f_j = f_j(y, x) \geq 0 \ (j \in J).$$

Задача для поиска Парето-оптимума будет выглядеть так:

$$u_{i_0(x,y)} \to \max_{(x,y)} \tag{32}$$

[19]Английский термин "congestion tendency" - перегруженность

[20]Проверьте "избыточность" и для произвольной $f(.)$.

$$u_i(x,y) \geq \hat{u}_i \quad (I \ni i \neq i_0), \qquad f_j(y,x) \geq 0 \ (j \in J) \ , \tag{33}$$
$$\sum_i (x_i^k - w_i^k) \leq \sum_j y_j^k \ (k \in K) \tag{34}$$

Для этой экономики справедлива общая теорема о неоптимальности, аналогичная теоремам благосостояния, но противоположная по утверждению:

Теорема 4 *Пусть $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ — общее (Вальрасовское) равновесие экономики (32)—(34) с экстерналиями, выполнены предположения* ВЫПУКЛ, ГРАД.

Если все связанные с переменной производства $y_j^{\hat{k}}$ экстерналии неотрицательные, т.е. $\dot{u}_{i,y_j^{\hat{k}}}(\bar{x},\bar{y}) \geq 0 \ (i \in I)$, $\dot{f}_{r,y_j^k}(\bar{x},\bar{y}) \geq 0 \ (r \neq j)$, причем хотя бы одно из этих неравенств строгое, а с другими переменными экстерналий не связано ($\dot{u}_{i,y_j^k}(\bar{x},\bar{y}) = 0 \ (i \in I, k \neq \hat{k}), \dot{f}_{r,y_s^k}(\bar{x},\bar{y}) = 0 \ (r,s \in J : s \neq j, \ k \in K)$) — то найдется альтернативная допустимая точка $(\hat{x},\hat{y})$ Парето- доминирующая точку $(\bar{x},\bar{y})$ в смысле вектора полезностей: $u(\bar{x},\bar{y}) \neq\leq u(\hat{x},\hat{y})$, и такая, что по сравнению с ней в $(\bar{x},\bar{y})$ имеет место недостаточный объем производства товара k фирмой j в том смысле, что $\bar{y}_j^k < \hat{y}_j^k$.

Если же все экстерналии связанные с некоторой переменной $y_j^{\hat{k}}$ отрицательные (вредные), то, аналогично, будет иметь место *избыточность их производства.* Верно и аналогичное утверждение о недостаточности полезного потребления $\bar{x}_i^k$ и избыточности вредного потребления.

При сходных предположениях, включающих условия на внутренность $(\hat{x} \in int(X))$ и на градиенты, верна также обратная теорема: такую имеющую ненулевые экстерналии Парето -оптимальную точку $(\hat{x},\hat{y})$ экономики не удается реализовать как равновесие без координации.

Доказательство этих теорем мы опускаем, мы докажем ее лишь для конкретных примеров, сохраняя общую идею доказательства: несовпадение диф. характеристик Парето -оптимума и равновесия.

Подчеркнем, что и условие, что точка $\hat{x}$ — внутренняя, и дифференцируемость существенны: без них теоремы неэффективности неверны, существуют опровергающие примеры с взаимокомпенсацией экстерналий. Неоптимальность может иногда не возникать, если часть экстерналий связанных с некоторой переменной позитивные а часть негативные: в редких (вырожденных) случаях они могут взаимокомпенсироваться. Рассмотрим

Пример 3.2 *(Курильщик и некурящий). Два студента, живущие в одной комнате, имеют целевые функции $u_1 = u_1(x_1^1, x_1^2)$ и $u_2 = u_2(x_2^1, x_1^2)$, которые зависят от имеющихся в их распоряжении денег (x_1^1 для первого, x_2^1 для второго) и от количества выкуриваемых первым из них сигарет (x_1^2). Второй участник — некурящий, и $\partial u_1(x_2^1, x_2^2)/\partial x_1^2 < 0$, а у первого, напротив, $\partial u_1(x_1^1, x_2^2)/\partial x_1^2 > 0$, если количество сигарет меньше 40 и $\partial u_1(x_1^1, x_2^2)/\partial x_1^2 = 0$, если $x_2^2 \geq 40$. Ежедневный доход каждого равен $w_i^1 = 20$. Для начальной же точки торговли в области прав на курение рассмотрим два варианта: (А) признается абсолютное право на чистый воздух: $w_1^2 = 0, w_2^2 = 40$, либо (В) признается право свободно курить.*

Если студенты не вступают в соглашение (равновесие без координации), то начальная точка будет равновесием. Покажем на ящике Эджворта с обычного (вогнутого) типа целевыми функциями, что как правило (за исключением редкого случая, когда начальная точка прав собственности лежит на Парето-границе) возникает *"фиаско рынка": такое равновесие не будет Парето-оптимальным. В обоих случаях А и В, в точке равновесия кривые безразличия не касаются, а пересекаются, поэтому можно осуществить Парето-улучшающий сдвиг (см. Рис.2 а).). В случае А первый может передать второму студенту часть денег за право курения нескольких сигарет. В случае В, наоборот, второй может передать первому студенту часть денег за право ограничить курение (см. Рис.2 б).)*

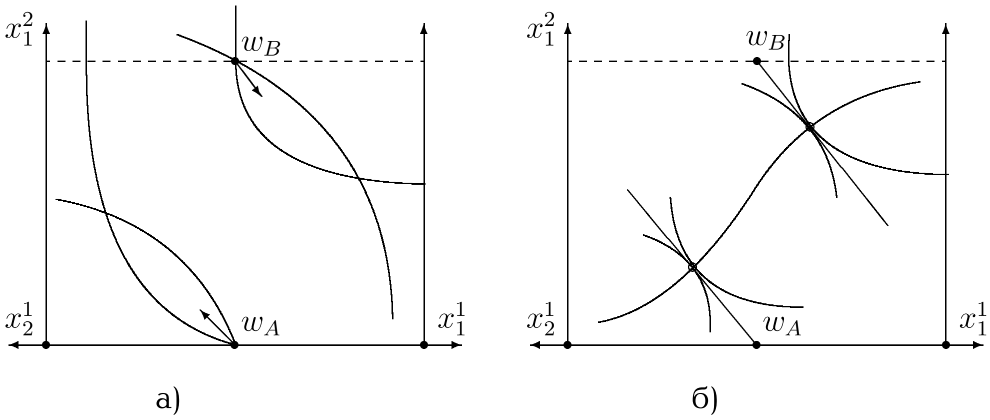


Рис. 2:

Пример иллюстрирует два момента. Во-первых, с теоретической точки зрения, в отличие от обыденного понимания загрязнения, экстерналии симметричны. Если в варианте В ущерб от наличия экстерналий наносится некурящему, то в варианте А — курильщику.

Во-вторых, когда, как здесь, объем экстерналий измерим и издержки сделок несущественны, тогда определение прав собственности и торговля экстерналиями способны скоординировать рынок и привести к оптимуму — устранить "фиаско рынка". В этом случае экстерналии, в сущности, превращаются в обычные товары, то есть возникает рынок экстерналий.

Пример 3.3 *(Внешние воздействия в производстве: общее равновесие)* [21]

Рассмотрим экономику в агрегированной форме: 3 товара, 1 совокупный потребитель (население в целом) и 2 производителя: 1-й сектор и 2-й сектор экономики. Производитель $j = 1, 2$ производит только j-ый продукт, имея возрастающую по a_j дифференцируемую производственную функцию $y_j = g_j(a_j, y_{-j})$(в частности, $y_1 = g_1(a_1, y_2)$, то есть функция зависит от найма рабочей силы обозначаемого $(-y_1^3) = a_1$, и от выпуска y_2 другого товара, то есть имеют место экстерналии, например, благодаря загрязнениям) и максимизирует прибыль $\pi_j(a, y) := p^j y^j - p^3 a_j$. Потребитель максимизирует по x^1, x^2, x^3 дифференцируемую возрастающую функцию $u(x^1, x^2, x^3)$ от потребления двух продуктов и от свободного времени x^3. Он является владельцем акций обоих предприятий, принимая доход от них как данный, и продает свое рабочее время из полного запаса принадлежащего ему времени $w^3 \geq a_1 + a_2 + x^3$, прочие запасы для простоты возьмем $(w^1, w^2) = 0$, поэтому ограничения его задачи в определении равновесия можно записать так:

$$0 \leq x,\ 0 \leq x^3 \leq w^3,\ p^1x^1 + p^2x^2 + p^3x^3 \leq p^3w^3 + \pi_1 + \pi_2. \tag{35}$$

[21] Маленво, стр.235.

Оптимально ли в такой экономике какое-либо нерегулируемое Вальрасовское равновесие $(\bar{p},\bar{x},\bar{a},\bar{y})$*?*

Рассмотрим только случай когда точка равновесия внутренняя в смысле $x \gg 0, 0 \ll a$*,* $x^3 < w^3$ *(для других случаев включение условий на положительность* x, a *в функцию Лагранжа затрудняет анализ).*

Найдем дифференциальную характеристику равновесия. Функция Лагранжа для потребителя тогда имеет вид

$$L(x, x^3, \lambda) := u_i(x^1, x^2, x^3) - \lambda(px + p^3x^3 - p^3w^3 - \pi_1 - \pi_2) \ .$$

Дифференцируя ее и упрощая полученные условия первого порядка получим, как и выше, обычную характеристику равновесия: равенство отношения предельных полезностей отношению цен (обозначим $\dot{u}^k := \partial u(\bar{x})/\partial x^k,\ \dot{u}^3 := \partial u(\bar{x})/\partial x^3$*):*

$$\dot{u}^k(\bar{x})/\dot{u}^r(\bar{x}) = p^k/p^r \quad (k, r = 1, 2, 3) \ . \tag{36}$$

Аналогично получим для обоих производителей (обычное) равенство отношений предельных производительностей отношению цен, следовательно — и отношению предельных полезностей:

$$1/\dot{g}_k^{a_k}(\bar{y}) = p^k/p^3 = \dot{u}^k/\dot{u}^3 \quad (k = 1, 2) \ . \tag{37}$$

Сопоставим полученную дифференциальную характеристику с характеристикой оптимума, которую получим обычным путем. Задача Парето-оптимума здесь проста, т.к. потребитель один:

$$u_i(x^1, x^2, x^3) \to \max_{x,a,y} \tag{38}$$

$$x^k \le y^k = g_k(a_k, y^k) \ (k = 1, 2), \tag{39}$$

$$a_1 + a_2 + x^3 \le w^3,\ 0 \le x,\ 0 \le a \ . \tag{40}$$

Предполагая опять, что исследуемая нами точка $(\hat{p}, \hat{x}, \hat{a}, \hat{y})$ *внутренняя (*$0 \ll (x, a)$*), пользуясь, как и ранее тем, что градиенты не равны нулю и, следовательно, теоремой Куна-Таккера — найдем дифференциальную характеристику оптимума:*

$$\dot{u}^k(\hat{x}, \hat{x^3})/\dot{u}^3(\hat{x}, \hat{x^3}) = 1/\dot{g}_k^{a_k}(\hat{a}_k, \hat{y}) - \dot{g}_r^{a_r}(\hat{a}_r, \hat{y})/\dot{g}_r^{a_r}(\hat{a}_r, \hat{y}) \quad ((k, r) = (1, 2),\ (k, r) = (2, 1)) \ . \tag{41}$$

Из сопоставления ее с характеристикой равновесия можно заключить:

1) Если экстерналии нулевые: $\dot{g}_r^{y_k}(\hat{a}_r, \hat{y}_k) = 0$*, то система уравнений (41) которой должен удовлетворять оптимум* $(\hat{x}, \hat{a}, \hat{y})$ *и система (36),(37) для равновесия* $(\bar{x}, \bar{a}, \bar{y})$ *совпадают (если исключить цены), поэтому возможно совпадение* $\hat{x} = \bar{x}$*. Однако равновесия неоднозначно охарактеризованы решениями системы уравнений (37) и оптимумы являются решениями более полной системы уравнений чем (41)). Поэтому проще Парето-оптимальность всех равновесий гарантировать здесь применением 1-й теоремой благосостояния, поскольку ее условия выполнены и рынок в этом случае — совершенный.*

2) Если же экстерналии ненулевые, то, очевидно, обсуждаемые системы уравнений несовместны, так что всегда имеем несовпадение: $\hat{x} \ne \bar{x}$*.*

Докажем утверждение о "недостаточности" неоптимального производства, предположив для простоты, что одна из экстерналий в равновесии $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$ *положительна* $\dot{g}_2^{y_1}(\bar{a}_2, \bar{y}_1) > 0$*, а вторая нулевая:* $\dot{g}_1^{y_2}(\bar{a}_1, \bar{y}_2) = 0$ *(если оба внешних влияния положительны, то этот эффект еще сильнее, но доказательство несколько усложнится).*

Построим малый допустимый сдвиг из равновесной точки, который бы повышал полезность $u(.)$ потребителя. А именно, перераспределим дифференциально малое количество времени из отдыха в труд в первом, создающем экстерналии, секторе: $da_1 > 0, da_2 = 0, dx^3 = -da_1 < 0$. Этот сдвиг допустим в рамках баланса времени (40). Он приводит к добавочному производству товара 1 в размере $dy_1 = \dot{g}_1^{a_1}(\bar{a}_1, \bar{y}_2)da_1 > 0$. Это, в свою очередь, приводит к добавочному производству товара 2 в размере $dy_2 = \dot{g}_2^{y_1}(\bar{a}_2, \bar{y}_1)\dot{g}_1^{a_1}(\bar{a}_1, \bar{y}_2)da_1 > 0$.

Прирост полезности потребителя (полный дифференциал) есть градиент целевой функции u умноженный на вектор допустимого сдвига, то есть

$$du = \dot{u}^1(\bar{x})dy_1 + \dot{u}^2(\bar{x})dy_2 + \dot{u}^3(\bar{x})dx^3 = \tag{42}$$

$$(\dot{u}^1\dot{g}_1^{a_1} + \dot{u}^2\dot{g}_2^{y_1}\dot{g}_1^{a_1} - \dot{u}^3)da_1 > 0. \tag{43}$$

Последнее неравенство верно, поскольку согласно (37) первое и третье слагаемые в скобках вместе есть ноль, а второе слагаемое положительно: непосредственные выгоды и издержки от добавочного труда da_1 в равновесии уравновешиваются, а косвенные не учитываются. Итак, можно построить дифференциально близкую к равновесной точку $(\tilde{x}, \tilde{y})$ достигнув Парето- улучшения.

Тем самым мы доказали в частном случае сформулированную выше общую теорему неоптимальности и "недостаточности".

Остается открытым вопрос: является ли производство в равновесной точке недостаточным по сравнению также и с Парето-оптимальной точкой $\hat{y}$, т.е. верно ли $\bar{y}_1 < \hat{y}_1$? Найти, при каких условиях на функции это верно, нелегко.

Пример 3.4 *Аналогичный пример с экстерналиями в потреблении в ситуации общего равновесия приведен в Маленво (стр. 234). Рассматриваются 2 участника, 2 блага: первое — предмет необходимости, а второе — роскоши. Производство вида $Y := \{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}_+^2 |\ y^1 + y^2 \leq 1\}$ означает, что оба блага могут быть произведены из одного ресурса с постоянной нормой замены. Целевые функции имеют вид $u_i = u_i(x_i^1, x_i^2, x_{-i}^2)$ $(i = 1, 2)$, причем предполагается, что полезность обоих возрастает по потреблению обоих благ, но убывает (или неизменна) по чужой второй переменной $x_{-i}^2)$ $(i = 1, 2)$, что выражает зависть к предмету роскоши. Пусть начальных запасов товаров нет, а доходы потребителей формируются как равные (1/2) доли прибыли единственного предприятия. Сделав обычные предположения ВЫПУКЛ, ГРАД, можно доказать утверждения: неоптимальность внутреннего равновесия без координации — если экстерналии ненулевые, избыточность вредных влияний или недостаточность полезных, найти налоги Пигу (определяемые ниже). Тонким моментом в этом является то, что направление распределения собранных налогов не безразлично для результата — оптимальным ли окажется равновесие с координацией. Более того, если мы хотим реализовать как равновесие с координацией конкретную Парето-оптимальную точку $\hat{x}$ и по ней выбрали налоги, то распределение не только налогов, но и другой собственности нужно выбрать так, чтоб в координированном равновесии доходы каждого соответствовали именно точке $\hat{x}$, в которой взяты производные определяющие налог (подобно подбору доходов во 2ТБ).*

Выполнима и немного более сложная, но более реалистичная задача: подобрать налоги, чтоб при имеющемся распределении собственности и заданном принципе деления налоговых сборов (например, поровну) реализовалась какая-либо оптимальная точка.

3.3 Способы координации рынка с экстерналиями

Существуют несколько способов исправить не эффективную по Парето ситуацию в экономике с внешними влияниями, государственных и негосударственных.

I. *Государственное вмешательство разных типов*

Рассмотрим сначала возможные способы координации действий участников с помощью *государственного* регулирования, расположив их по убыванию жесткости вмешательства:

1. "Военный коммунизм" — прямое установление заданий (квот) $\tilde{y}$ производителям и рационирование потребления $\tilde{x}$. Очевидно, для оптимальности исхода необходимо и достаточно чтобы задания были равны оптимальным $\hat{x}, \hat{y}$ (значит, плановый орган должен знать точку оптимума).

2. "Хозрасчетный социализм" — установление директивных цен $\tilde{p}$ производителям и потребителям, при личной свободе потребителей, которые могут выбирать свою занятость и потребление в рамках бюджетного ограничения, и хозрасчете производителей. Очевидно, при принятых предположениях и при строгой вогнутости всех функций для оптимальности исхода необходимо и достаточно, чтобы цены были пропорциональны оптимальным оценкам. (значит, плановый орган должен знать оценки оптимума).

Реальный социализм находился где-то в промежутке между 1 и 2. Для него было характерно прямое установление заданий $\tilde{y}$ производителям, при личной свободе потребителя и директивных ценах. Возможно, именно необходимость координации экстерналий следует считать главным аргументом идеологии этих режимов.

3. Корректирующие налоги (дотации) Пигу.

Недостатком механизмов координации 1 и 2 является то, что государственный орган пытается брать на себя всю информационную работу по изучению потребностей и возможностей, для этого он должен бы быть "всеблаг, всемогущ, всеведущ что мало реалистично. Вариант 3 с налогами требует лишь знания некоторых производных в предполагаемой точке оптимума, что, кажется, легче выполнимо (по крайней мере, когда производные не слишком сильно меняются от объемов); возможно, этот путь приводит к меньшим погрешностям исходов. Рассмотрим его.

Пример 3.5 *(Продолжение Примера 3.3) Государство утверждает дотации — добавки d^1, d^2 к ценам товаров 1 и 2 соответственно. Подразумевается, что потребитель продолжаем покупать по обычным ценам, складывающимся на рынке, а производитель продает по этим ценам плюс получает d^k за каждую единицу товара k от государства. Задача первого предприятия тогда выглядит так (здесь $a_1 := y_1^a$):*

$$(p^1 + d^1)g_1(a_1, y^2) - p^3 a_1 \to \max_{a_1} \quad a_1 \geq 0.$$

Отсюда, и из условий индивидуальной рациональности потребителя (36) для внутренних регулируемых равновесий $\tilde{a}, \tilde{y}$ имеем

$$(p^1 + d^1)/p^3 = 1/\dot{g}_1^a(\tilde{a}, \tilde{y}) = \dot{u}^1(\tilde{x})/\dot{u}^3(\tilde{x}),$$

и аналогичное условие по второму товару. Отсюда, сопоставляя это с (41), очевидно, что если мы хотим, чтобы равновесие с регулированием $(\tilde{x}, \tilde{a}, \tilde{y})$ совпало с оптимумом $(\hat{x}, \hat{a}, \hat{y})$, следует взять налог равный (если $p^3 = 1$) эффекту от экстерналий в точке оптимума:

$$d^1/p^3 := \dot{g}_2^{y^1}(\hat{a}, \hat{y})/\dot{g}_{2a_2}(\hat{a}, \hat{y}),$$

аналогично и для второго производителя. Тогда, если равновесные цены оптимальны: $\tilde{p} = \hat{p}$, то производители и потребитель выберут оптимальные решения, значит хотя бы одно из равновесий, а именно $(\hat{p}, \hat{x}, \hat{y})$ оптимально. Если же равновесий несколько, трудно сказать, оптимальны ли все.

Любопытно, что в этом примере направление распределения собранных налогов безразлично для результата оптимальности равновесия с координацией: оптимальная точка, в которой взяты производные определяющие налог, в любом случае может совпадать с равновесием. Это было бы не всегда так в случае нескольких потребителей (при наличии эффекта дохода).

II. *Рыночные решения*

Проблема экстерналий была заложена нами уже в самом описании экономики. Использованная формализация заранее предполагает, что определенные виды соглашений между экономическими субъектами невозможны. Однако если это ограничение снять, то вполне вероятно, что произойдет самостоятельная координация участниками своих действий без вмешательства государства. О подобных ситуациях торговли экстерналиями или, иначе, включении экстерналий в рынок мы упоминали в примерах "трагедии общины" и "курильщика". О них идет речь и в следующем нестрогом утверждении, известном как "теорема" Коуза, утверждающем, что для Парето- оптимальности в определенных условиях безразлично, кому принадлежат права на экстерналии.

Утверждение 3.3.1 *("Теорема" Коуза)* [22]. *1) Если права участников на оказание внешнего воздействия четко определены и издержки сделок нулевые (т.е. нет никаких препятствий к соглашениям), то возникающее соглашение приводит к Парето-оптимальному решению. 2) Если к тому же участники не влияют на общие цены экономики (рассматривается частное равновесие) и эффекта дохода для них нет (целевые функции линейны по деньгам), то кому бы ни присвоить права на оказание внешнего воздействия, объемы экстерналий будут одинаковы.*

Первое утверждение здесь можно трактовать как Парето- оптимальность точки из ядра, или же классического равновесия (если под соглашением понимать исход рыночной торговли с использованием цен). Второе — непосредственное следствие отсутствия эффекта дохода.

Существуют два основных вида соглашений, решающих проблему экстерналий:

1. Оплата положительных экстерналий и компенсация за сокращение отрицательных экстерналий.

2. Объединение затронутых экстерналиями участников в одну фирму (соглашение о максимизации общей прибыли, при некотором ее разделе).

Проиллюстрируем "теорему" Коуза примерами.

Пример 3.6 *(Продолжение Примера 3.3)*

Утверждение 3.3.2 *В примере 3.3 при использовании обоих вариантов рыночной координации деятельности предприятий равновесие будет Парето -оптимальным.*

Доказательство. *Оптимальность равновесий в обоих случаях доказываются просто ссылкой на 1-ю теорему благосостояния: ведь оба эти рынка оказываются совершенными, без экстерналий.*

[22] R.Coase, 1960

Действительно, в варианте координации 1 предполагается, что первый производитель предъявляет спрос y_1^2 на экстернальные услуги второго и договаривается с ним о цене p_1^2 на эти услуги. Аналогично предъявляет спрос y_2^1 на услуги первого и второй, платя цену p_2^1 за них. Тогда задача максимизации прибыли первым примет вид (здесь $a_1 := y_1^a$):

$$(p^1 + p_2^1)y^1 - p_1^2 y_1^2 - p^3 a_1 \to \max_{y_1, a_1, y_1^2} y^1 = g_1(a_1, y_1^2),\ 0 < a_1.$$

В точке равновесия с координацией $\tilde{y}$ должно оказаться, что спрос на экстернальные услуги совпал с предложением: $\tilde{y}^2 = \tilde{y}_1^2$. Находя дифференциальную характеристику этой точки мы получим, что равновесие обязательно оптимально, причем цена услуги окажется $p_2^1 = d^1 = \dot{g}_2^{y^1} / \dot{g}_{2a_2} p^3$. Это означает, что государство, если хочет установить оптимальный налог Пигу, должно имитировать налогом цену потенциального добровольного соглашения участников.

В варианте координации 2 из анализа задачи максимизации совокупной прибыли так же получаем, что равновесие с координацией оптимально. Этот, как и предыдущий, результат можно доказать и применением 1-й теоремы благосостояния, поскольку рынок становится классическим как при торговле услугами так и при слиянии фирм: экстерналии перестают быть экстерналиями, а становятся просто товарами.

Пример 3.7 *(Продолжение Примера 3.2)*

Соседям-студентам разумно было бы вступить в соглашение, когда один из них за деньги отказался бы от части своих прав. При этом возникнет ситуация как в классическом варианте "ящика Эджворта": из точек А и В участники перейдут на Парето-границу (см. Рис.2 б)).

Мы видим, что наличие экстерналий у какого либо блага сама по себе не препятствует организации эффективного рынка этого блага, если возможно установить и контролировать права собственности на его использование. В Примере (3.2) затруднение, возможно, заключается в том, что у участников нет согласия об исходных правах, что привело к конфликту, к ситуации В или, наоборот, к А, в зависимости от того, кто сильнее. Этот конфликт препятствует взаимовыгодному соглашению. Кроме того, соглашению могут препятствовать традиции общества, ненаблюдаемость действий партнера и другие причины.

Еще одно затруднение связано с тем, что соглашения трудно достижимы тогда, когда тех, кто мог бы заплатить за увеличение или уменьшение интенсивности экстерналий, много, причем экстерналии на них действуют не выборочно, а на всех сразу. В этом случае возникает проблема общественного блага, которая рассматривается в следующей главе.

4 Общественные блага

4.1 Экономика с общественными благами

Определение 4.1.1 *Назовем* благом коллективного потребления *такое благо, потребление которого одним субъектом не мешает потреблению его другими; то есть связь между количеством x_i^k доступным потреблению отдельным (i-м) потребителем, и* *наличным количеством блага k в экономике в целом ($\sum_j y_j^k + w_\Sigma^k$) выражается неравенством $x_i^k \le \sum_j y_j^k + w_\Sigma^k$.*

Иными словами, когда один из участников потребляет такое благо, то количество этого блага доступное другим участникам не убывает. Будем называть это свойство неконкурентностью совместного потребления (англ. non-rivalness).

Самым распространенным видом благ коллективного потребления является информация: изобретения, литературные произведения, аудио- и видеозаписи, компьютерные программы и т.п. Типичные примеры также - оборона и телетрансляция; моя полезность не убывает от того, что кто-то еще включил приемник.

Многие блага имеют характер смешанный, промежуточный между благами коллективного и частного потребления. В качестве примера можно указать транспортную инфраструктуру (дороги, мосты), потребительские свойства которой ухудшаются по мере нарастания перегруженности. В общем случае материальный полубаланс для i-го потребителя можно записать в виде $x_i^k \le \phi_i(\sum_j y_j^k + w_\Sigma^k, x_{-i}^k)$, где x_{-i}^k — вектор объемов потребления блага другими (не i), а ϕ_i — некоторая функция. Блага коллективного и частного потребления будут тогда крайними частными случаями этой функции с $\phi_i(.) = \sum_j y_j^k + w_\Sigma^k$ и $\phi_i(.) = \sum_j y_j^k + w_\Sigma^k - \sum_{j \ne i} x_j^k$ соответственно. Рассмотрением крайних случаев мы и ограничимся.

Определение 4.1.2 *Благо коллективного потребления k называют* общественным благом, *когда физические или организационные условия не позволяют устранить никого из участников сообщества I от потребления этого блага, то есть количество x_i^k доступное для потребления любым участником одинаково: $x_i^k = \sum_j y_j^k + w_\Sigma^k$.*[23]

Практически чистым общественным благом можно считать оборону. Обычно неисключаемость (non-excludability) имеет не абсолютный, физический характер, а просто исключение требует достаточно больших издержек. Более того, иногда один и тот же вид благ коллективного пользования, например телевизионные программы, дороги, может потребляться то в коммерческой форме (например, исключение организовано в виде шлагбаума на дороге, и с каждого проезжающего взимается плата), то в общественной — быть доступным для использования любым желающим.

Неконкурентность часто приводит к образованию естественной монополии собственника блага (если фирма построила дорогу, вряд ли другая станет строить параллельную), и создает проблему выбора различных уровней оплаты и выбора объема блага (мы коснемся этого при анализе монополий). Тем более, и неисключаемость создает сходную проблему, которую называют проблемой финансирования общественного блага, ей и посвящен этот раздел.[24] Поскольку общественные блага можно

[23]Для более тонкого разграничения типов благ можно (мы не будем этого делать) ввести еще одну переменную — то количество общественного блага, которое реально *потребляется* участником. Оно может быть меньше *имеющегося в распоряжении* количества. Мы же будем предполагать неубывание целевых функций по этой переменной, поэтому разница между имеющимся и потребляемым не важна.

[24]Важно понимать, что для обычных благ (частного потребления) неисключаемость (невозможность не допустить к потреблению) создает еще более серьезную проблему; количество общественного блага по крайней мере не уменьшается от того, что его потребляет кто-то другой. Напротив, отсутствие охраны законом и/или моралью прав собственности, например, на урожай огородов быстро приводит к их исчезновению. Таким образом, мы наблюдаем существование только тех частных благ, права собственности на которые удается гарантировать (исключаемые блага).

считать частным случаем экстерналий (а именно: влияние производителя на потребителей) то проблема финансирования о.б. родственна проблеме нахождения налогов Пигу.

Обозначим K_{priv} множество частных благ, а K_{pub} — множество общественных благ. Для простоты предположим, что каждое общественное благо потребляется только потребителями, а предприятия могут общественные блага только производить. Поскольку мы не различаем доступное для потребления и потребляемое, то можно считать, что в потребительские функции прямо входит общий имеющийся объем общественного блага $x_i^k = \sum_j y_j^k$ $(k \in K_{pub})$ (начальные запасы общественных благ будем считать нулевыми). Итак, рассматриваемая нами экономика описывается следующей оптимизационной задачей получения Парето-оптимальной точки $(\hat{x}, \hat{y})$:

$$
\begin{aligned}
(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \quad & [\forall \hat{i} \in I \Rightarrow \quad u_{\hat{i}}(\hat{x}_{\hat{i}}) = \max_{x,y} u_{\hat{i}}(x_{\hat{i}}) \quad : && (44) \\
& u_i(x_i) \geq u_i(\hat{x}_i), \ i \in I \setminus \{\hat{i}\} \ ; && (45) \\
& f_j(y_j) \geq 0, \ j \in J \ ; && (46) \\
& \sum_{i \in I} x_i^k \leq \sum_j y_j^k + \sum_{i \in I} w_i^k, \quad k \in K_{priv} \ ; && (47) \\
& x_i^k = \sum_j y_j^k, \quad k \in K_{pub}, \ i \in I \ ]. && (48)
\end{aligned}
$$

Последнее равенство выражает материальные балансы общественных благ, и только оно отличает эту ситуацию от классического рынка.

Чтобы **вывести диференциальную характеристику** любой точки Парето-оптимума, используем по-прежнему предположения ВЫПУКЛ, ГРАД, включающие дифференцируемость всех функций. Пусть, далее, целевые функции u_i возрастают хоть по одному частному и по всем общественным благам.

Соответствующий Лагранжиан имеет вид (здесь $\lambda_{\hat{i}} := 1$):

$$
\begin{aligned}
L(x, y, \lambda, \mu, \sigma) := \sum_i \lambda_i u_i(.) + \sum_j \mu_j f_j(.) + \sum_{k \in K_{priv}} \sigma^k (\sum_j y_j^k + \sum_i w_i^k - \sum_i x_i^k) + \\
+ \sum_{k \in K_{pub}} \sigma^k (\sum_j y_j^k - x^k). \qquad (49)
\end{aligned}
$$

Исключив из необходимых условий экстремума (проверив, что теорема Куна-Таккера применима) множители Лагранжа (не равные нулю, как и в теореме благосостояния), получим диф. характеристику оптимума:

$$
\sum_i \dot{u}_i^{k_1}(\hat{x}, \hat{y}) / \dot{u}_i^{k_2}(\hat{x}, \hat{y}) = \dot{f}_j^{k_1}(\hat{y}) / \dot{f}_j^{k_2}(\hat{y}) \ (\forall j \in J, k_1 \in K_{pub}, k_2 \in K_{priv}) \qquad (50)
$$

$$
\dot{u}_i^{k_1}(\hat{x}, \hat{y}) / \dot{u}_i^{k_2}(\hat{x}, \hat{y}) = \dot{f}_j^{k_1}(\hat{y}) / \dot{f}_j^{k_2}(\hat{y}) \ (\forall i \in I, j \in J, k_1, k_2 \in K_{priv}) \qquad (51)
$$

Первое из соотношений здесь называют уравнением Самуэльсона[25]. Оно говорит, что *сумма* предельных норм замещения общественного блага на частное в потреблении равна норме замещения общественного блага на частное в производстве.

[25]Samuelson, P.A. (1954) "The Pure Theory of Public Expenditure," Review of Economics and Statistics, 350-356.

В дальнейшем будем рассматривать более простой случай, когда общественное благо одно (первое), фирма одна, причем $f(y) = g(y^2, ..., y^l) - y^1$, а начальные запасы всех благ нулевые. Тогда экономика (44) с общественным благом примет вид:

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \quad [\forall \hat{i} \in I \Rightarrow \quad u_{\hat{i}}(\hat{x}_{\hat{i}}) = \max_{x,y} u_{\hat{i}}(x_{\hat{i}}) \quad : \tag{52}$$

$$u_i(x_i) \geq u_i(\hat{x}_i), \; i \in I \setminus \{\hat{i}\}$$

$$x_i \geq 0 \;, \quad x_i^1 = y^1 \leq g(y^2, ..., y^l), \; i \in I \tag{53}$$

$$\sum_i x_i^k \leq y^k \quad , \quad \forall k \neq 1 \;]. \tag{54}$$

4.2 Равновесие (псевдоравновесие) Линдала

Чтобы определить для экономики с общественным благом (52) состояние, аналогичное равновесию классической экономики, нужно ввести индивидуальные потребительские цены на общественное благо $q = (q_i)_{i \in I} \in I\!R^n$, причем их сумма должна равняться цене производства этого блага: $\sum_i q_i = p^1$. Индивидуальным ценам соответствуют индивидуальные заявки x_i^1 на общественное благо.

Задачи индивидуальной рациональности потребителя и производителя имеют вид

$$\{ \;\; u_i(x_i^1, x_i^2, ..., x_i^l) \to \max_{x_i} \quad | \quad x_i \geq 0, \;\; q_i x_i^1 + \sum_{k=2}^{l} p^k x_i^k \leq \beta_i. \;\; \} \tag{55}$$

$$\{ \;\; py \to \max_{y} \quad | \quad y^1 \leq g(y^2, ..., y^l) \;\; \}. \tag{56}$$

Определение 4.2.1 *Назовем* равновесием (псевдоравновесием) Линдала[26] *такое допустимое, в смысле (53)— (54), состояние* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{q})$*, в котором выполнен закон Вальраса в форме* $\sum_i (q_i \hat{x}_i^1 + \sum_{k=2}^{l} p^k \hat{x}_i^k) = p\hat{y}$*, сумма* $\sum_i \bar{q}_i = \bar{p}^1$*, а* $(\bar{x}, \bar{y})$ *является решением задачи производителя (56) и всех задач потребителей (55) при ценах* $(\bar{p}, \bar{q})$*.*

В равновесии Линдала имеет место консенсус: каждый желает потреблять именно существующий (производимый) объем общественного блага: $\bar{y} = \bar{x}_i^1$ $(\forall i)$. Для него верно следующее утверждение — аналог теорем благосостояния для совершенных рынков.

Утверждение 4.2.1 *Пусть в экономике (52) функции* $u(.)$ *и* $g(.)$ *дифференцируемы и вогнуты (или приводимы к вогнутым), и всюду выполнено условие ненасыщаемости в форме* $[\dot{u}_i^1(x_i) > 0 \;\; \exists \hat{k} \in K_{priv} : \; \dot{u}_i^{\hat{k}}(x_i) > 0 \; \forall i \in I, \; \forall x_i \geq 0]$*, и* $grad(g(\cdot)) \neq 0$*. Тогда:*

(I) Любое внутреннее (в смысле $\bar{x} \gg 0$*) равновесие Линдала Парето-оптимально.*

(II) Для любого внутреннего Парето-оптимума $(\hat{x}, \hat{y})$ *найдутся цены* (p, q) *и доходы* $(\beta_1, ..., \beta_n)$*, такие что* $(\hat{x}, \hat{y}, p, q)$ *— равновесие Линдала.*

Доказательство.[27]

[26] Lindahl, E. (1919) "Positive Losung, Die Gerechtigkeit der Besteuerung".

[27] Утверждение верно и при более слабых условиях (в частности можно выводить условие ненасыщаемости из условия внутренности, не требовать дифференцируемости; см. в Главе 2 доказательство ТБ1 и ТБ2). Можно также проводить доказательство утверждения сводя его к ТБ1 и ТБ2); то есть рассматривать экономику с общественным благом как классическую экономику, считая, что производителем выпускается не одно общественное благо, а соответствующий вектор частных благ $(x_i^1, ..., x_n^1)$ — по одному на каждого потребителя, в целевую функцию которого он входит.

(I) Если выполнены предположения утверждения, то и к задаче оптимума (используем ненулевой градиент) и к задаче равновесия применима теорема Куна-Таккера, и можно проверить совпадение условий первого порядка. Диф. характеристика равновесия $(\bar{x}, \bar{y}, p, q)$ будет иметь вид:

$$\dot{u}_i^1(\bar{x})/\dot{u}_i^k(\bar{x}) = q_i/p^k, \qquad p^1/p^k = -1/\dot{g}^k(\bar{y}) \ . \tag{57}$$

Эти равенства вытекают, как обычно, из анализа задач потребителя (55) и производителя (56). Просуммировав их по i, учитывая $\sum_k q_k = p^1$, получим уравнение Самуэльсона.

Аналогично, для пары частных благ, как обычно, верно

$$\dot{u}_i^{k_1}(\bar{y}^1, \bar{x})/\dot{u}_i^{k_2}(\bar{y}^1, \bar{x}) = p^{k_1}/p^{k_2} = \dot{g}^{k_1}(\bar{y})/\dot{g}^{k_2}(\bar{y}) \ . \tag{58}$$

Таким образом, дифференциальные характеристики оптимума и равновесия совпадают, что позволяет подобрать оценки λ, μ, σ Лагранжиана (49) такие, что в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ Лагранжиан достигает безусловного экстремума, то есть выполнено необходимое условие условного экстремума задачи (52). Благодаря выпуклости этой задачи необходимое условие совпадает с достаточным, таким образом равновесие $(\bar{x}, \bar{y})$ является также решением задачи (52), что и требовалось для Парето-оптимальности.

(II) Вторая часть утверждения доказывается аналогично, сопоставлением диф. характеристик оптимума и равновесия. Конкретнее, нужно подобрать цены в соответствии с (57) и (58). Например, можно взять вектор $p := \sigma$, где σ — оптимальные оценки товаров из (52), (49), затем

$$q_i := p^1(\dot{u}_i^1/\dot{u}_i^{\hat{k}})/(\sum_{j \in I} \dot{u}_j^1/\dot{u}_j^{\hat{k}}) \tag{59}$$

— здесь нормировка обеспечивает выполнение условия $\sum q_i = p^1$, а $\hat{k}$ — номер из условий теоремы, поэтому деление корректно. Затем, как и во IIТБ, подбираются доходы $\beta_i := q_i \hat{x}_i^1 + \sum_{k=2}^{l} p^k \hat{x}_i^k$ соответствующие оптимуму, и множители Лагранжа индивидуальных задач, соответствующие безусловным экстремумам индивидуальных Лагранжианов (используем пропорциональность индивидуальных цен полезности из (59)). Как и ранее, выпуклость задач гарантирует, что необходимые условия экстремумов являются достаточными, поэтому $\hat{x}, \hat{y}$ являются экстремумами в задачах потребителя (55) и производителя (56). Допустимость (сбалансированность) $\hat{x}, \hat{y}$ вытекает из Парето-оптимальности, а выполнение закона Вальраса проверяется как в теореме благосостояния, поэтому $(\hat{x}, \hat{y}, p, q)$ — равновесие. ▥

Итак, казалось бы, проблему оптимального финансирования общественных благ можно разрешить, организовав равновесие Линдала. Однако попытки построить процедуру (типа аукциона, tatonnement, или др.) сходящуюся к этому равновесию наталкиваются на принципиальную трудность. В отличие от классических рынков, все известные процедуры "нащупывающие" равновесие Линдала оказываются **манипулируемы** при обычных предположениях; то есть участникам выгодно делать ложные сообщения о своих предпочтениях или о желаемом спросе, в результате исход процедуры может попасть в равновесие Л. только в исключительных случаях, либо при полной честности участников. Поэтому, из-за трудно-реализуемости, это равновесие называют чаще **псевдоравновесием**. Поясняя эту трудность, рассмотрим, например, аналог процесса нащупывания Вальраса.

Процедура нащупывания 1. Аукционер сообщает в каждый момент t участникам текущие цены $(p(t), q(t))$. Потребители, исходя из этих цен, отвечают спросом на частные блага $x_i^k(t)$ $(k = \overline{2, l})$ и спросом $x_i^1(t)$ на общее благо. Аукционер подправляет с некоторой скоростью реакции $\alpha > 0$ цены товаров, спрос или предложение на которые избыточны:

$$\mathrm{d}p^k(t)/\mathrm{d}t = \alpha(\textstyle\sum_i x_i^k(t) - y^k(t))\ (k = 2, ..., l),$$
$$\mathrm{d}q_i(t)/\mathrm{d}t = \alpha(x_i^1(t) - y^1(t)), \quad p^1(t) := \textstyle\sum_i q_i(t).$$

Можно показать, что если участники не станут манипулировать заявками, то такая процедура при довольно реалистичных условиях на целевые функции сходится к стационарной точке, которая будет являться равновесием Линдала. Однако вероятна манипулируемость; она состоит в том, что участникам (понимающим, что их личная доля q_i/p^1 в финансировании общественного блага возрастает пропорционально их заявкам x_i на благо) выгодно занижать свою объявляемую потребность в общественном благе, чтобы меньше платить за него. Действительно, понижая $x_i^1(t)$ участник знает, что понижает тем самым цену, которую платит за общественное благо, *почти не снижая* (при большом количестве участников m) уровень общего блага. Таким образом, здесь возникнет эффект безбилетника (англ. free-rider effect). В результате, по-видимому, исходом процедуры окажется равновесие с финансированием по добровольной подписке, о котором идет речь в следующем подразделе.

4.3 Равновесие с финансированием общественного блага по добровольной подписке (равновесие без координации)

Представим ситуацию, когда создание общего блага участниками никак не координировано: каждый сам вкладывает столько средств или усилий, сколько хочет. Примером служат добровольные взносы в благотворительные фонды, добровольные личные усилия по поддержанию чистоты в общественных местах. Окажется ли равновесие без координации Парето-оптимальным? Интуитивно ожидаемый ответ — "обычно нет". Чтобы выявить условия, когда он верен, формализуем ситуацию.

Обозначим добровольный взнос на общие нужды i-го участника через $t_i \geq 0$; взнос наряду с расходами на другие блага выплачивается из его фиксированного дохода β_i. Собранная сумма полностью идет на приобретение общественного блага: $p^1y^1 = \sum_i t_i$. Пусть содержательно оправдано (например, тем, что все $\dot{u}_i^1 > 0$) предположение, что цена общественного блага положительна. Мы предполагаем, кроме того, что каждый участник ведет себя нэшевским образом, считая взносы t_{-i} прочих участников заданными, при выборе своего взноса t_i.

Тогда задача индивидуальной рациональности потребителя примет вид:

$$u_i(x_i^1, x_i^2, ..., x_i^l) \to \max_{t_i, x_i}, \tag{60}$$
$$(t_i, x_i) \geq 0, \quad t_i + \sum_{k=2}^{l} p^k x_i^k \leq \beta_i, \quad x_i^1 = y^1 = (t_1 + \sum_{j \neq i} t_j)/p^1,$$

Определение 4.3.1 *В данной модели* равновесие без координации *или, иначе,* равновесие с финансированием по добровольной подписке *есть набор $(p, \bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$, такой, что выполнены (i) условия индивидуальной рациональности (56), (60) производителей и* *потребителей, (ii) полубалансы, включая условие $x_i^1 = y^1$ $(\forall i)$, и (iii) условия дополняющей нежесткости (закон Вальраса) в форме $\sum_{k=2}^{l} p^k(y^k - \sum_i x_i^k) = 0$.*

Предполагая обычные условия ВЫПУКЛ, ГРАД, и что точка равновесия $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$ — внутренняя (в смысле $\bar{t} \geq\neq 0,\ \bar{x} \gg 0$) применим теорему Куна-Таккера и получим дифференциальные соотношения первого порядка. При нахождении условия равновесия потребителя $\hat{i}$ для которого $\bar{t}_{\hat{i}} > 0$, подставим выражение для $x_{\hat{i}}^1 = y^1$ прямо в целевую функцию:

$$\partial L/\partial t_{\hat{i}} = \dot{u}_{\hat{i}}^1((t_1 + \sum_{j\neq i} t_j)/p^1, \bar{x})/p^1 - \lambda = 0, \tag{61}$$

$$\partial L/\partial x_{\hat{i}}^k = \dot{u}_{\hat{i}}^k(\bar{y}^1, \bar{x}) - \lambda p^k = 0 \ (k = \overline{2, l}) \ . \tag{62}$$

где λ — множителем Лагранжа для бюджетного ограничения.

Для участников же недостаточно заинтересованных в общем благе, для которых $(\bar{x}_i \gg 0, \bar{t}_i = 0)$ получим (взяв переменную Лагранжа $\nu_i \geq 0$ для ограничения $t_i \geq 0$) аналогично:

$$\partial L/\partial t_i = \dot{u}_i^1((t_1 + \sum_{j\neq i} t_j)/p^1, \bar{x})/p^1 - \lambda + \nu_i = 0, \tag{63}$$

$$\partial L/\partial x_i^k = \dot{u}_i^k(\bar{y}^1, \bar{x}) - \lambda p^k = 0 \ (k = \overline{2, l}) \ . \tag{64}$$

Получим диф. характеристику равновесия без координации:

$$\dot{u}_i^1(\bar{y}^1, \bar{x})/\dot{u}_i^k(\bar{y}^1, \bar{x}) = p^1/p^k = -1/\dot{g}^k(\bar{y}) \ (\forall i: \ t_i > 0). \tag{65}$$

Для любой пары частных благ выполняется обычное соотношение (58):

Сопоставив полученное с диф. характеристикой (51) любой Парето-оптимальной точки $\hat{x}$ увидим, что эти системы уравнений могут иметь общее решение $(\bar{x}, \bar{y}) = (\hat{x}, \hat{y})$ в довольно редких случаях: **1)** когда потребитель всего один $m = 1$, либо **2)** когда только у одного потребителя положительные производные по общественному благу (например $\dot{u}_i^1(\bar{y}^1, \bar{x}_i) = 0$ $(i \neq 1)$), либо **3)** когда подобные производные одних участников положительны, а других отрицательны и происходит точное уравновешивание. Более точно, имеет место теорема неэффективности:

Утверждение 4.3.1 *Пусть в экономике с общественным благом (52) выполнено* ВЫПУКЛ, *все функции дифференцируемы, и реализовалось равновесие без координации $(p, \bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$, внутреннее: $(\bar{y}^1, \bar{x}) \gg 0$, и такое, что $\dot{u}_i^1(\bar{y}^1, \bar{x}_i) \geq 0$ $(i \in I)$, причем $t_i > 0$, $\dot{u}_i^1(\bar{y}^1, \bar{x}_i) > 0$ хотя бы для двух участников $i = i_1, i = i_2$. Тогда (I) равновесие не Парето-оптимально, причем (II) в равновесии имеет место (локальная) недостаточность уровня общественного блага, в том смысле, что можно достичь Парето-улучшения повысив на сколько-то этот уровень и перераспределив ресурсы.*

Доказательство. Мы уже доказали (I) (несовместностью диф. характеристик) для случая, когда все $t_i > 0$ (проверку другого случая опускаем, она аналогична). Недостаточность же (II) доказывается построением дифференциально малого Парето-улучшающего сдвига из точки равновесия:
$dy_1 > 0$ и $dx_{i_1}^{k_1} = dy_{k_1} = -dy_1 \dot{u}_{i_1}^1/\dot{u}_{i_1}^{k_1} < 0$. Окажется, что в новой точке $(\tilde{x}, \tilde{y})$ никто из

участников не проигрывает по сравнению с равновесием, в частности, $du_{i_1} = 0$, а по крайней мере участник i_2 строго выигрывает. ▥

Комментируя результат, во-первых, отметим, что в рассматриваемой ситуации неоптимальности чаще всего появляется один или несколько "безбилетников делающих нулевые взносы $t_i = 0$ и пользующихся общественным благом задаром.

Во-вторых отметим, что дифференцируемость является необходимым условием для выявленной неоптимальности. Например, рассмотрим случай жестко взаимодополняющих общественного и частного блага

$$u_i(y^1, x_i^2) := \min\{a_i^1 y^1; a_i^2 v_i(x_i^2, ..., x_i^l)\}, \tag{66}$$

где $a_i^1 \geq 0$, $a_i^2 \geq 0$ − произвольные, возможно разные для участников, заданные коэффициенты взаимодополнительности, $v_i = v_i(x_i^2, ..., x_i^l)$ − некоторая функция выражающая полезность участника i от частных благ. Можно показать (Сотсков 1982), что *если в экономике с общественным благом (52) целевые функции имеют взаимодополняющий вид (66), то равновесие без координации всегда Парето -оптимально.*

Аналогичный эффект возникает, если общее благо дискретно: если кто-то не вложит денег — оно исчезнет. Недифференцируемость − это **4-й** случай эффективности "добровольного" равновесия, видимо довольно редкий, как и случаи **1−3** рассмотренные выше. **5-й** случай может реализоваться, если нарушить условие внутренности. Например, если n участников готовы платить за единицу общественного блага по 1$, а она стоит $4n$\$, то в точке $(t_1, ..., t_n) = 0$ возможен оптимум. Аналогичный, обратный, случай: когда все участники ценят частные блага настолько мало по сравнению с общим, что все деньги тратят на общее: $x_i^k = 0,\ k = 2, ..., l,\ i \in I$; здесь тоже возможна оптимальность.

Итак, Парето -оптимальность равновесий с общим благом без координации в реальности довольно редка. Однако на самом деле в ситуациях внешне "добровольного" финансирования не всегда реализуется именно "равновесие без координации". В частности, большая чем в России чистота улиц во многих западноевропейских странах при примерно одинаковой с Россией интенсивности профессиональной уборки наводит на мысль, что там имеет место равновесие с *неявной* координацией: донесение мусора до урны считается *обязательным*, а не добровольным личным взносом в общее благо, и мораль исполняет роль полицейского поддерживающего эту координацию.

Пример 4.1 *(Неэффективность без координации) Пусть в экономике* 3 *участника, частный товар один* $k = 2$ *(например, деньги), а целевые функции имеют вид* $u_i = \alpha_i \ln(y^1) + x_i^2$ $(i = 1, 2, 3)$,[28] *где коэффициенты* α_i *возьмем равными* i. *Пусть функция производства общественного блага линейна с коэффициентом* 1: $y^1 = g(y^2) = -y^2$, *причем баланс блага 2 имеет вид* $\sum_i (x_i^2 - w_i^2) = y^2$. *Например, это можно интерпретировать как трех соседей (или фирм, или стран), решающих нанять общую охрану, предлагаемую по цене* 1.

При нескоординированном приобретении общественного блага каждый приобретает его на сумму t_i, *так что общее его количество составит* $y^1 = \sum_i t_i$. *Каждый из соседей будет максимизировать функцию* $u_i = i \ln(t_1 + t_2 + t_3) + w_i^2 - t_i$ *при ограничении* $t_i \geq 0$. *В максимуме* $i/y^1 \leq 1$, *причем выполняется условие дополняющей нежесткости* $(1 - i/y^1)t_i = 0$. *Поскольку в равновесии условия для всех трех соседей должны выполнятся одновременно, то ненулевой взнос сделает только один из них, и для*

[28] В примере всюду верхние индексы, а не степени.

него $i/y^1 = 1$. *Это будет тот сосед, который ценит общественное благо больше, а именно третий. Остальные предпочтут пользоваться благом бесплатно. Отсюда* $y^1 = t_3 = 3,\ t_1 = t_2 = 0$. *Как мы увидим ниже, в Парето -оптимуме* $y^1 = 6$, *то есть количество общественного блага меньше оптимального.*

4.4 Равновесие с долевым финансированием и голосованием

Безусловно, прямое соглашение участников — *точка из ядра* — являлось бы во всех отношениях хорошим решением проблемы финансирования общественного блага, когда соглашение достижимо. К сожалению, очень часто участники, особенно если их много, не способны практически прийти в переговорах к потенциально возможному соглашению.

Еще одна возможная процедура — это рыночное равновесие с государственным регулированием. Государство, например, может установить, что участники экономики с общественным благом финансируют его производство на долевой основе, объем производства определяется посредством некоторой процедуры голосования, а координацию производства частных благ осуществляет рынок.

При этом i-й участник платит налог в размере $\delta_i p^1 y^1$. Здесь $\delta_i \geq 0$ — доля участника в финансировании общего блага, причем $\sum_i \delta_i = 1$. Участники высказывают свои заявки $z_i \in Z_i$ на общее благо (выбираемые из некоторого допустимого множества Z_i, например $Z_i = I\!R_+$, естественно считать, что $z_i := x_i^1$, но возможно и несовпадение) и действует какая-то схема обобщения общественного мнения $G(z_1, ..., z_m)$ (схема голосования), так что объем производство общественного блага выбирается равным $y^1 = G(z)$.

Например, возможны такие схемы голосования:
V1) усреднение: $G = \sum_i z_i/m$,
V2) минимум: $G = \min_i z_i$,
V3) максимум: $G = \max_i z_i$,
V4) медиана: $G = med(z_1, ..., z_m)$, где функция $med(.)$ принимает значение среднего из упорядоченных по возрастанию чисел $z_1, ..., z_m$, если же m четно — то среднего арифметического из двух средних. Это правило, как известно ("Теорема о среднем избирателе см.Долан), практически тождественно в данном случае голосованию простым большинством.

При использовании правил (V2)—(V4) существует обычно (т.е. если участники неодинаковы) только один ключевой участник, то есть такой, что небольшие изменения его выбора как-то влияют на результат общего голосования в смысле

$$\partial G(z)/\partial z_i \neq 0,\ z_i \in int(Z_i),$$

остальные же z_j локально не влияют на исход! Это приводит к *неопределенному* (множественному) решению z_j в голосовании прочих участников, если не предположить их "осторожного" или "доминирующего" поведения; мы эти варианты не рассматриваем.

Будем предполагать, что каждый участник ведет себя нэшевским образом, считая высказанные пожелания z_{-i} прочих участников заданными при выборе своего z_i (повторяющаяся игра). Тогда задачи индивидуальной рациональности потребителей (для производителей сохраняется (56)) принимают вид

$$u_i(x_i^1, x^2, ..., x^l) \to \max_{(z_i, x_i)}, \tag{67}$$

$$\text{где}\ \ x_i \geq 0\ , z_i \in Z_i \tag{68}$$

$$p^1\delta_i x_i^1 + \sum_{k=2}^{l} p^k x_i^k \le \beta_i$$
$$x_i^1 = G(z_1, ..., z_m) \ .$$

Определение 4.4.1 Равновесие с долевым финансированием и голосованием *с правилом голосования $G(.)$ и с фиксированными долями финансирования общественного блага δ есть набор $(\bar{z}, \bar{x}, \bar{y}.p)$, такой, что выполнены (i) условия индивидуальной рациональности (56), (68) производителей и потребителей, (ii) полубалансы, включая $x_i^1 = y^1$ $(i \in I)$, и (iii) "условия дополняющей нежесткости" (закон Вальраса), (iv) выполнено правило голосования: $y^1 = G(z)$.*

Утверждение 4.4.1 *Если в равновесии $(\bar{z}, \bar{x}, \bar{y}.p)$ с долевым финансированием и голосованием каждый участник i является ключевым (то есть в некоторой окрестности $U \ni \hat{z}$ равновесия верно $\partial G(z_i, \hat{z}_{-i})/\partial z_i \neq 0$) и выполнены предположения Утверждения (4.2.1), то $(\bar{x}, \bar{y}, p, q)$ с $q_i = \delta_i p^1$ есть псевдоравновесие Линдала, и следовательно, достигнут Парето-оптимум.*

Доказательство основано на том, что все условия первого порядка совпадают. ▥

Таким образом, *консенсус, в смысле $x_i^1 = y^1$ $(i \in I)$ — признак оптимальности*.

С другой стороны, если какой-то участник хотел бы изменить объем производства общественного блага, но не может повлиять на исход голосования, то это не всегда признак того, что равновесие не оптимально. Для правил голосования V1, V2 и V3 неоптимальность обычно имеет место (в задачах мы ее докажем). Однако при "медианном" голосовании может быть, что ключевой (медианный) участник выберет такой объем производства общественного блага, который соответствует Парето-оптимуму (см. Пример (4.1) ниже).

Итак утверждение (4.4.1) показывает, что если "благие и мудрые" законодатели априорно установят правильные (*пропорциональные полезностям*) индивидуальные ставки налога (правильно распределят бремя финансирования общего блага между его потребителями) то результатом голосования и рынка будет Парето-эффективное состояние экономики. Для "правильного" установления достаточно знать всего лишь предельные нормы замещения (соотношения предельных полезностей) в том равновесии Линдала, которое соответствует данному распределению собственности[29] (предполагается единственность равновесия). В частности, если участники одинаковы, то доли должны быть равными.

Попыткой приблизиться к описанному теоретическому идеалу (налогам, пропорциональным предельным полезностям от общего блага) является, например, финансирование строительства и ремонта дорог с помощью налога на бензин или налога на транспортные средства.

Однако хотелось бы иметь процедуру выявления потребностей в общем благе, чтобы не опираться на априорные концепции законодателей. Вот одна из возможных процедур:

Процедура нащупывания 2.

1) Аукционер сообщает участникам текущие цены $p(t)$ (будем подразумевать дискретное время t) и текущие доли финансирования $\delta_i(t)$.

[29] Это, все же гораздо меньше, чем знать все об экономике.

2) Участники отвечают спросом на частные блага x_i^k $(k = \overline{2,l})$, спросом z_i на общее благо при текущих ценах и долях. Совокупный спрос на общее благо $x^1_{_\Sigma} = G(z)$ формируется по схеме голосования усреднением: $x^1_{_\Sigma} = \sum_i z_i/m$. Производители объявляют предложение y_j.

3) Аукционер изменяет цены $p^k(t)$ товаров, спрос или предложение которых избыточно: $p^k(t+1) := p^k(t) + \varepsilon \sum_i (x_i^k - w_i^k) - \sum_j y_j^k$ $(k = 1, ..., l,\ \varepsilon > 0)$ (в том числе общественного блага) а также повышает доли финансирования пропорционально соотношению объявленной полезности (заявке) общего блага со средней:

$$\delta_i(t+1) = [\delta_i(t)\mu_i(t)/\sum_{j=1}^{m} \delta_j(t)\mu_j(t)],\ \text{где } \mu_i := mz_i/\sum_{j=1}^{m} z_j \geq 0. \qquad (69)$$

Затем переходит опять к 1) и т.д.

Это по сути дела еще одна процедура нахождения равновесия Линдала, и, так же как предложенная выше, является манипулируемой. Различными исследователями предпринимались попытки создать работоспособную неманипулируемую процедуру, и оказалось, что в общем случае это невозможно. Одна из таких процедур описывается в следующем подразделе, но годится только для экономики определенного вида.

Пример 4.1 *(продолжение) Предположим, что соседи голосуют по схеме V1. т.е. $y^1 = (z_1+z_2+z_3)/3$. Каждый максимизирует функцию $u_i = i\ln((z_1+z_2+z_3)/3) + w_i^2 - \delta_i(z_1 + z_2 + z_3)/3$ при ограничении $z_i \geq 0$. В максимуме $i/y^1 \leq \delta_i$, причем выполняется условие дополняющей нежесткости $(\delta_i - i/y^1)z_i = 0$. Поскольку нет верхнего ограничения на заявку, то тот из соседей, кто хочет, чтобы приобреталось большее количество общественного блага, может навязать свои предпочтения другим. Пусть, например, взносы берутся поровну: $\delta_i = 1/3$. Тогда третий проголосует так, чтобы $y^1 = 9$, что больше оптимального количества. Остальные вынуждены будут не голосовать: $z_i = 0$.*

Предельные нормы замещения первого блага на второе равны $\dot{u}_i^1/\dot{u}_i^2 = i/y^1$. Пропорции между ними в любой точке (и в том числе в Парето -оптимуме) одинаковы. Поэтому, чтобы получить консенсус и оптимум, необходимо взять $\delta = (1/6, 1/3, 1/2)$.

Равновесие при использовании правила V1 с ограничением $z_i \geq 0$, окажется тем же, что при использовании V3.

Заметим, что в этом примере при равных долях и медианном голосовании оптимальность или избыточность (или недостаточность) общего блага зависит от положения медианного коэффициента полезности α_{med}. Оптимум будет достигнут, если медианный коэффициент равен среднему: $\alpha_{med} = \sum_i \alpha_i/m$, что в данном случае выполнено.

4.5 Процедура Гровса-Кларка

В самом общем случае построить процедуру, справедливо (в смысле равенства прав участников) и корректно (неманипулируемо) выявляющую предпочтения на общее благо и приводящую всегда к Парето -оптимуму нельзя. Это было выяснено парой очень близких по смыслу теорем: теоремой Эрроу о диктаторе[30] и теоремой Жиббарда и Сатертуэйта (Gibbard, Saterthwait) о невозможности неманипулируемого выбора.

[30] Arrow, K.J. (1951) Social Choice and Individual Values. Доказательство рассматривалось в курсе мат. экономики.

В нашем конкретном примере с общественным благом и тремя участниками, казалось бы, можно воспользоваться однопиковостью функций u_i по аргументу y^1 и применить процедуру голосования простым большинством. Однако по всей совокупности аргументов однопиковости нет, поэтому голосование за конкретные варианты *состояния экономики в целом* (y^1, t_1, t_2, t_3) ничем не кончится: налицо парадокс Кондорсе (бесконечность процедуры переголосования).

Все же, оказывается, в частном случае, когда целевые функции, квазилинейны по единственному частному благу (деньгам), тогда можно построить процедуру, корректную выявляющую предпочтения и гарантированно приводящую к наилучшему выбору уровня общественного блага $\hat{y}^1$ из допустимого множества Y (неважно, дискретного Y или непрерывного, типа $\mathbb{R}_+$). Это процедура Гровса-Кларка.

Определение 4.5.1 *Будем называть целевые функции потребителей квазилинейными по благу l, если они имеют вид $u_i = \vartheta_i(y^1, x_i^2, ..., x_i^{l-1}) + x_i^l$, и переменные x_i^l входят в единственное ограничение вида $\sum_i x_i^l = x_{\Sigma}^l$*[31].

Если в экономике существует такое благо, то экономика обладает следующим удобным для ее исследования свойством:

Утверждение 4.5.1 *Пусть целевые функции квазилинейны по благу l, тогда Парето-граница совпадает с множеством решений задачи максимизации суммы полезностей $\sum_i u_i$ на множестве физически допустимых состояний. Если, кроме того, $l = 2$ (частное благо одно) и функции ϑ_i строго вогнуты, то существует единственный оптимальный уровень общественного блага $\hat{y}^1$ (одинаковый во всех точках Парето-границы).*

Докажем это утверждения для экономики (52) с дифференцируемыми и вогнутыми (или приводимыми к вогнутым) функциями u_i и g. Подставим в лагранжиан (49) выражение для u_i. Производные по x_i^l для всех i должны быть равны нулю: $\partial L/\partial x_i^l = \lambda_i - \sigma^l = 0$. Отсюда получаем, что все λ_i равны; можно считать, что $\lambda_i = 1 \quad (i \in I)$. Таким образом, задача нахождения Парето-оптимума сводится к нахождению седловой точки следующей *концентрированной* функции Лагранжа:

$$L(x, y, \mu, \sigma) := \sum_i u_i(.) + \mu(g(.) - y^1) + \sum_{k=2}^{l} \sigma^k (\sum_j y_j^k + \sum_i w_i^k - \sum_i x_i^k), \tag{70}$$

а это то же самое, что нахождение максимума суммы функций полезности при соответствующих ограничениях.

Уравнение Самуэльсона в случае квазилинейности по l примет вид

$$\sum_i \dot{\vartheta}_i^1(\hat{x}, \hat{y}) = -1/\dot{g}^l(\hat{y}) \tag{71}$$

.

Доказательство единственности оптимального уровня общественного блага тривиально.

Процедура Гровса-Кларка.

1) Координатор априори назначает функции $c_i(y^1)$ финансирования каждым участником общих издержек $c(y^1)$ производства общественного блага, в сумме равные

[31] Очевидно, что для любого обычного частного блага такой вид имеет материальный баланс.

$\sum_i c(y^1)_i = c(y^1)$, например, задав (априорные, по своему усмотрению) доли финансирования δ_i.

2) Участники сообщают свои *чистые полезности* при данной схеме финансирования от каждого уровня блага — $v_i(y^1) = \vartheta_i(y^1) - c_i(y^1)$.

3) Выбирается уровень блага, максимизирующий суммарную чистую объявленную полезность:

$$\bar{y}^1 := G(v) := \arg\max_{y^1} \sum_i v_i(y^1), \tag{72}$$

а также уровни, которые были бы выбраны без учета мнения i-го участника;

$$y^1_{(i)} := G_{(i)}(v) := \arg\max_{y^1} \sum_{j \neq i} v_j(y^1), \quad i \in I.$$

4) Определяется налог Кларка на каждого участника за изменение общественного выбора, равный убытку прочих участников:

$$\tau_i = \sum_{j \neq i} (v_j(y^1_{(i)}) - v_j(\bar{y}^1)), \quad i \in I,$$

он, очевидно, неотрицательный и нулевой при $(y^1_{(i)} = \bar{y}^1)$.

5) Каждый участник в результате будет иметь полезность $v_i(\bar{y^1}) - \tau_i = \vartheta_i(\bar{y^1}) - c_i(\bar{y^1}) - \tau_i$. Налог Кларка не перераспределяется, а должен быть выброшен из системы (сообщества) данных участников.

Утверждение 4.5.2 *Если все участники правдиво сообщили v_i, то (I) уровень определенный в этой процедуре Парето-оптимален ($\bar{y}^1 = (\hat{y}^1)$, а если все налоги Кларка равны нулю ($\tau_i = 0$, $i \in I$), то и состояние в целом, включая платежи, Парето-оптимально. (II) Если к тому же финансирование долевое: $c_i(y^1) = \delta_i p^1 y^1$ и доли соответствуют отношению предельных полезностей в оптимуме ($\delta_i = \vartheta_i(\hat{y}^1)/\sum_{j \in I} \vartheta_j(\hat{y}^1)$), целевые функции строго вогнуты и $\bar{y}^1 > 0$, то налоги Кларка равны нулю.*

Доказательство. Часть I данного утверждения непосредственно следует из Утверждения 4.5.1.

Для доказательства II заметим, что для внутреннего в смысле $(\bar{y^1}, w - t) \gg 0$ равновесия по долевому финансированию мы выше доказали единогласие при правильно выбранных долях (то есть то что любая $i \in I$ задача максимизации индивидуальной чистой полезности $v_i(y^1)$ дает одинаковое решение $\bar{y}^1$). Решение в данном случае единственно по строгой вогнутости v_i. Поэтому и максимизация суммы любого набора $\bar{I} \subset I$ таких целевых функций имеет то же решение $\bar{y}^1$, откуда следует отсутствие ключевого участника и равенство нулю налога. ▥

Утверждение 4.5.3 *Стратегия каждого участника сообщать правдиво чистую полезность v_i — доминирующая стратегия.*

Доказательство. Предположим, участник $i = 1$ сообщил неверную целевую функцию $\tilde{v}_1 \neq v_1$ и добился этим решения по общественному благу $\tilde{y}^1$ вместо $\bar{y}^1$. Выиграл ли он? Сопоставим его полезности, учитывающие налог Кларка, в оптимальной $\bar{y}^1$ и в ложной точках, доказывая что:

$$u_1(\tilde{y}) = v_1(\tilde{y}) - \sum_{j \neq 1} (v_j(y^1_{(i)}) - v_j(\tilde{y}^1)) \quad \leq v_1(\bar{y}) - \sum_{j \neq i} (v_j(y^1_{(i)}) - v_j(\bar{y}^1)).$$

Сокращая $v_j(y^1_{(i)})$ справа и слева приходим к эквивалентному неравенству $\sum_{j\in I} v_j(\tilde{y}^1) \leq \sum_{j\in I} v_j(\bar{y}^1)$, очевидно верному по условиям максимизации (72). ▥

Итак, по переменной y^1 — общественному благу эта процедура всегда дает хороший результат, но возможны потери в деньгах. Эта процедура, в сущности, реализуется, когда несколько по-разному заинтересованных в чем-то сторон подкупают государственного чиновника, от которого зависит решение вопроса. Проблема выбора блага решится в пользу тех, кому больше надо, будет заплачена сумма равная налогу Кларка. Альтернатива — договоренность (из ядра) заинтересованных сторон, если они способны достичь ее.

Об убывании (относительном и абсолютном) потерь денег в процедуре с возрастанием числа участников говорит следующее. Рассмотрим ряд $t = 2, 3, ...$ ситуаций, являющихся репликами исходной; то есть для каждой следующей ситуации $t + 1$ в экономике присутствует ровно в t раз больше таких же участников каждого типа по сравнению с предыдущей. Соответственно, доли δ_i на каждом шаге все делятся на t.

Утверждение 4.5.4 *В ситуации с дискретным общественным благом регулируемым по Гровсу-Кларку, каковы бы ни были доли δ_i, найдется номер реплики $\hat{t}$ такой, что для всех последующих t налоги Кларка нулевые. (Без доказательства)*

Пример 4.1 *(продолжение) Поскольку в рассматриваемом примере целевые функции квазилинейны по деньгам, то Парето-оптимум можно найти из решения задачи*

$$\ln(y^1) + 2\ln(y^1) + 3\ln(y^1) - y^1 \to \max .$$

Отсюда получим, что в оптимуме $y^1 = 6$.

Применим к рассматриваемому примеру процедуру Гровса-Кларка. Пусть, например, издержки приобретения общественного блага покрываются за счет равных налогов на соседей: $\delta_i = 1/3(\forall i)$. Если каждый сообщит истинную функцию чистой полезности, то $v_i = i\ln(y^1) - y^1/3$. В результате будет выбран Парето-оптимальный уровень производства общественного блага: $\bar{y}^1 = \arg\max_{y_1}(v_1 + v_2 + v_3) = \arg\max_{y_1}(6\ln(y^1) - y^1) = 6$.

Аналогично установим объем общественного блага, который был бы выбран без i-го участника ($i = 1, 2, 3$):

$$\bar{y}^1 = \arg\max_{y_1}(5\ln(y^1) - 2y^1/3) = 7.5,$$
$$\bar{y}^1 = \arg\max_{y_1}(4\ln(y^1) - 2y^1/3) = 6,$$
$$\bar{y}^1 = \arg\max_{y_1}(3\ln(y^1) - 2y^1/3) = 4.5.$$

Отсюда вычислим налоги Кларка: $\tau_1 = (5\ln(7.5) - 7.52/3) - (5\ln(6) - 62/3) \approx 0.12$. Аналогично $\tau_2 = 0$ и $\tau_3 \approx 0.14$.

4.6 Блага коллективного пользования — рыночное решение

Как уже отмечалось, не всегда неисключаемость, свойственная общественным благам, носит абсолютный характер (физически невозможно не допустить к потреблению). С одной стороны, это вопрос издержек недопущения к потреблению и издержек обеспечения прав собственности, с другой стороны, это вопрос существующих в обществе институтов. Пример "трагедии общин" является иллюстрацией этого последнего случая и показывает направление, в котором может получить разрешение проблема общественных благ — установление собственности на блага коллективного пользования, чтобы собственник имел право не допускать других субъектов к потреблению принадлежащего ему блага.

Рассмотрим два вида рыночных решений этой проблемы, которые отличаются распределением прав собственности.

Назначение индивидуальной цены p_i^1 для каждого потребителя обеспечивает Парето -оптимальность равновесия Линдала. Близкий аналог индивидуализированной платы за общее благо — *ценовая дискриминация* (англ. discrimination — неодинаковое отношение) при продаже монопольных продуктов[32]. Если фирма — изготовитель идеально умеет различать полезность, получаемую потребителями от блага (и предотвращать воровство — несанкционированное копирование), то монопольное равновесие с индивидуальными ценами окажется Парето -эффективным. При этом цены должны различаться не только в зависимости от потребителя, но и в зависимости от количества, купленного потребителем (индивидуальная цена на каждую единицу блага).

Для благ коллективного потребления характерно наличие больших капитальных затрат (англ. lump-sum costs — затраты "крупным куском") и небольших затрат на обеспечение потребления их дополнительным субъектом (например, издержки копирования информации), что означает, что предельные издержки постоянные. Обычное для конкурентных рынков установление цены по предельным издержкам здесь не подходит, поскольку не будут окупаться капитальные затраты. Таким образом, рынок благ коллективного потребления имеет тенденцию к монополизации — уменьшается количество фирм и увеличиваются их размеры, так что каждая отдельная фирма получает возможность влиять на цену. Это позволяет проводить ценовую дискриминацию — назначать разные цены для разных потребителей.

Другое решение той же проблемы — *кооператив* (или клуб) потребителей. Кооператив собирает деньги на приобретение блага от своих членов, а затем распределяет благо между ними, не допуская к потреблению не членов.

По сути дела, и коммерческая фирма, и кооператив в случае благ коллективного пользования решают ту же задачу, что и государство в случае общественных благ — задачу дискриминации: распределить финансирование общих затрат между потребителями в зависимости от их потребностей. Грубо говоря, платить должен тот, кому благо нужно в большей степени и кто готов больше заплатить. Вопрос состоит в том, какой из этих институтов может лучше справится с задачей.

5 Элементы теории монополии, олигополии и монополистической конкуренции

Основной материал этой темы содержится в учебнике Э.Долан, Д.Линдсей "Рынок: микроэкономическая модель главы 8 − 9. В качестве дополнительного материала может быть рекомендована глава 6 учебника Маленво.

5.1 Простая монополия

Монополией называют фирму, которая является единственным производителем некоторого товара. С теоретической точки зрения важно, что цену на этот товар монополия будет рассматривать не как фиксированную, а как зависящую от объема производства в соответствии с некоторой убывающей функцией: $p = p(y)$ (индексы фирмы и блага для упрощения опускаем).

[32]См. следующую главу

Пусть издержки заданы функцией $c(y)$. Тогда поведение монополии можно описать задачей:

$\pi = p(y)y - c(y) \to \max_y$.

Предположим, что $p(y)$ и $c(y)$ дифференцируемы. Дифференциальная характеристика равновесия монополии имеет следующий вид:

$$p'(y)y + p = c'(y)$$
$$\text{ли} \quad p(1 - 1/|\varepsilon|) = c'(y), \tag{73}$$

где $\varepsilon = \frac{dy}{dp}\frac{p}{y}$ — эластичность спроса по цене.

Как и в случае фирмы на конкурентном рынке, предельная выручка должна быть равна предельным издержкам. Отличие состоит в том, что предельная выручка монополии равна не цене, а цене с добавкой, учитывающей, что эластичность цены спроса по объему производства не нулевая, или, другими словами, эластичность спроса на продукцию фирмы не бесконечная.

В рамках концепции общего равновесия затруднительно получить функцию $p(y)$, поэтому в дальнейшем мы будем считать, что меняется цена только монопольного товара, а цены всех остальных остаются без изменения (частичное равновесие). В такой ситуации естественно считать, что монополия ориентируется на функцию общего спроса на данный товар, а $p(y)$ есть обратная функция к функции спроса: $p(y) = D^{-1}(y)$, где $D(p)$ — сумма индивидуальных функций спроса $\mathcal{X}_i(.)$, в которых все цены кроме одной фиксированы. Рынок такого товара изображен на Рис.3 а).

Утверждение 5.1.1 *Если $c'(y) - p(y)$ возрастает, то при прочих равных условиях на монопольном рынке объем продаж меньше, а цена товара выше, чем на конкурентном.*

Доказательство. Обозначим равновесный объем производства на монопольном рынке y^M, а на конкурентном y^C. Должны выполняться следующие соотношения:

$c'(y^M) - p(y^M) = p'(y^M)y^M < 0$

$c'(y^C) - p(y^C) = 0$.

Отсюда $y^M < y^C$ и при убывающей функции спроса $p^M < p^C$.

Утверждение 5.1.2 *Если предельные издержки положительны ($c'(y) > 0$), то в равновесии монополии эластичность спроса по цене по модулю больше единицы: $|\varepsilon| > 1$.*

Утверждение следует из (73).

Пример 5.1 *Пусть спрос задан функцией $p(y) = a - by$, а издержки — функцией $c(y) = dy$ (a, b, d — константы). При совершенной конкуренции цена будет равна предельным издержкам: $p^C = d$, а объем производства составит $y^C = \frac{a-d}{b}$. Прибыль монополии тогда равна $\pi = y(a - by) - dy = (a - d)y - by^2$. Максимум прибыли будет достигнут при $y^M = \frac{a-d}{2b}$ и $p^M = \frac{a+d}{2}$*

В предыдущих разделах мы рассматривали эффективность экономики с точки зрения принципа, предложенного Парето. При этом индивидуальные полезности считаются несравнимыми. Другая распространенная концепция оптимальности основана на квазилинейности полезности по деньгам так что общественный оптимум находится как сумма денежных полезностей отдельных индивидуумов.

На основе денежной полезности вводится понятие излишка потребителя, который равен изменению полезности при переходе от текущей цены к цене, при которой спрос равен нулю. Потребительский излишек представляют как площадь под кривой спроса потребителя. Можно находить его и как площадь под кривой *обратного* спроса, но от полученного валового излишка потребителя следует отнять расходы, то есть произведение количества товара на цену. Суммарный излишек потребителей на рынке одного товара есть площадь под кривой общего спроса. Парное понятие — излишек производителя — есть просто превышение выручки над издержками, т. е. прибыль.

Когда вся потенциальная выгода, т.е. разница между максимальной (резервной) ценой, которую еще согласны платить потребители и минимальной ценой, за которую готов отдать товар продавец (издержками), распределяется между потребителями и производителями, это означает, что данное состояние рынка Парето - оптимально. Это может быть только в случае, если объем производства рассматриваемого блага такой же, как в ситуации совершенной конкуренции. Можно назвать этот объем производства оптимальным. В частности, очевидно, что при совершенной конкуренции равновесие Парето - оптимально.

На монопольном рынке это не так — существуют потенциально выгодные сделки, которые не реализуются, и объем производства меньше оптимального, т. е. имеет место чистая потеря благосостояния (англ. deadweight loss) и фиаско рынка. Чтобы осуществить эти сделки, нужно продавать дополнительные единицы блага по цене меньшей, чем цена тех, которые уже продаются. Если же цена по каким-то причинам может быть только единой, то ее снижение с целью осуществления дополнительных сделок приведет к падению прибыли. Таким образом, проблема заключается в том, что отсутствует ценовая дискриминация.

5.2 Дискриминирующая монополия

С другой стороны, если дискриминация возможна, издержки дискриминации равны нулю и монополия обладает полной информацией, то монополия выберет объем производства, равный объему производства при совершенной конкуренции и при этом чистая потеря благосостояния (как впрочем и излишек потребителя) будет равна нулю.

Для того, чтобы осуществить такую идеальную дискриминацию, необходимо установить отдельную цену на каждую дифференциально малую единицу блага, а именно, наибольшую цену, за которую потребитель еще согласен ее купить. На практике монополия не обладает полной информацией и издержки дискриминации не равны нулю.

Перечислим основные способы дискриминации:
1) по принадлежности потребителя к определенной группе (например, дети, пенсионеры и прочие);
2) по количеству покупаемого товара;
3) по качеству товара (например, книги в твердом и мягком переплете).

Пример 5.2 *Пусть монополия разделила потребителей своей продукции на 2 группы с независимым спросом:* $p_a(y_a)$ *и* $p_b(y_b)$*. При этом издержки производства для обеих групп общие* $c(y_a + y_b)$*. Продифференцировав прибыль* $\pi = p_a(y_a)y_a + p_b(y_b)y_b - c(y_a + y_b)$ *по* y_a *и* y_b*, получим диф. характеристику равновесия монополии:* $p_a(1 - 1/|\varepsilon_a|) = c'$ *и* $p_b(1 - 1/|\varepsilon_b|) = c'$*.*

В равновесии выполнено следующее условие для отношения цен :

$$\frac{p_a}{p_b} = \frac{1 + \frac{1}{|\varepsilon_a| - 1}}{1 + \frac{1}{|\varepsilon_b| - 1}} \tag{74}$$

Цена для той группы потребителей будет выше, эластичность спроса которой (по модулю) ниже, то есть той группы, которая в меньшей степени сокращает свой спрос в ответ на повышение цены.

5.3 Причины сохранения монополий

Общеизвестно, что монополия может получать высокие "монопольные сверхприбыли". Возникает вопрос о причинах стабильности монополий: почему потенциальные конкуренты не вступают в отрасль? Укажем некоторые возможные объяснения.

1. Законодательные барьеры. Примером могут служить патенты.

2. Технологические ограничения. Существуют отрасли, в которых производство одной фирмой эффективнее, чем несколькими. Такие отрасли обычно характеризуются высокими постоянными издержками и низкими предельными издержками и, соответственно, возрастающей отдачей от масштаба. Монополии этого вида обычно называют естественными.

3. Стратегические соображения потенциальных конкурентов. Конкуренты могут опасаться, что монополия начнет с ними борьбу, например, с помощью установления демпинговых цен. Рассмотрим этот случай на простом примере.

Пример 5.3 *Представим ситуацию как игру двух участников: монополиста и конкурента. Конкурент имеет две стратегии: вступать или не вступать в отрасль. Если он вступит в отрасль, то монополист имеет две стратегии: бороться с конкурентом или не бороться. Исход игры, как всегда, зависит от поведения участников и выигрышей.*

Концепция равновесия Нэша для игры в стратегической форме не подходит в данном случае, поскольку игра неповторяющаяся и конкурент делает свой выбор первым. Очевидно, что здесь следует использовать концепцию равновесия Штакельберга, как она описана в разделе о теории игр.

Кроме того, удобно представить ситуацию как игру в развернутой форме. Можно изобразить последовательность ходов и выигрыши игроков с помощью следующего дерева игры:

```
Выбор конкурента            Выбор монополиста        Выигрыш
                                           (конкурент, монополист)
```

$$\left\{\begin{array}{ll} \longrightarrow \quad \text{ачинать выпуск} \quad \longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \longrightarrow \quad \text{ороться} & (0,0) \\ \longrightarrow \quad \text{е бороться} & (2,1) \end{array}\right. & \\ \longrightarrow \quad \text{е начинать выпуск} \qquad \longrightarrow & (1,9) \end{array}\right.$$

Ища равновесие Штакельберга нужно рассматривать игру с конца дерева. Если конкурент начинает производство, то при данной величине выигрышей монополисту не выгодно бороться. Если конкурент это предвидит, то равновесием будет (2, 1).

Если бы вступление монополиста в борьбу давало набор выигрышей (0, 2), то он выбрал бы борьбу и конкуренту было бы не выгодно начинать производство.

В следующем подразделе обсуждается что может быть, если конкуренты вступают в отрасль, но их недостаточно много, чтобы считать рынок полностью конкурентным.

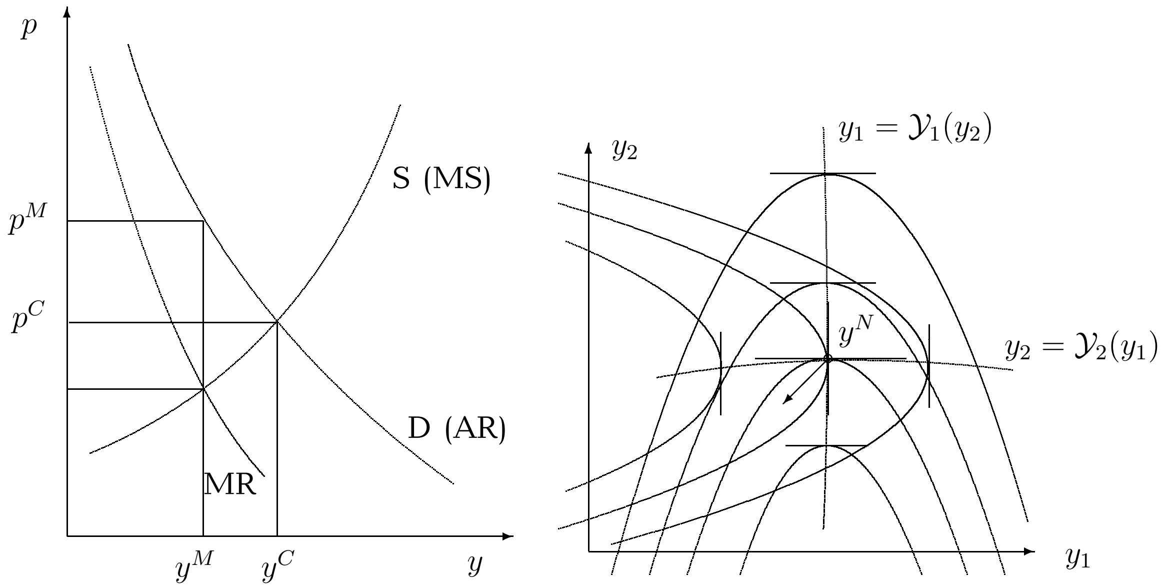


Рис. 3: а) Монопольный рынок б) Олигополия по Курно

5.4 Олигополии

Олигополией называют ситуацию, когда на рынке несколько производителей, и каждый из них может влиять на цену. Если производителей двое, то такую олигополию называют дуополией. Возможны разные гипотезы о поведении участников олигополии. Участники могут демонстрировать либо некооперативное, либо кооперативное (сговор, картель) поведение.

Типы некооперативного поведения можно классифицировать по следующим признакам:
(I) Одновременное принятие решений, ориентация на текущие ответы партнеров. (II) Последовательное принятие решений: один из участников лидер, остальные подстраиваются к его решению, и он это знает. Для каждой из этих гипотез, кроме того, можно предполагать, что стратегии участников сводятся к назначению либо (A) цен, либо (B) объемов выпуска.

Таким образом, получаем четыре типа некооперативного поведения (см. таблицу) и один тип кооперативного.

	Последовательно	Одновременно
Количество	Модель Штакельберга	Модель Курно
Цена	Ценовое лидерство	Модель Бертрана

Будем предполагать, что на рынке действуют n фирм. Фирма с номером j максимизирует свою прибыль $\pi_j = p_j y_j - c_j(y_j)$.

Картель

Проще всего предсказать объем выпуска (но не распределение доходов между участниками) в точке ядра, то есть в случае картеля. Поскольку функции прибыли квазилинейны по деньгам (фирмы могут передавать прибыль друг другу), то Парето-оптимум олигополии[33] находится просто как максимум суммарной прибыли. Таким образом, картель действует как монополия.

Мы должны несколько изменить модель, по сравнению со случаем обычной монополии, поскольку у каждой из входящих в картель фирм своя функция издержек.

[33]но не экономики

Суммарная прибыль равна $\pi_{\Sigma} = y_{\Sigma} p(y_{\Sigma}) - \sum_j c_j(y_j)$, где $y_{\Sigma} := y_1 + ... + y_n$ — суммарный объем производства. Продифференцировав, получим диф. характеристику равновесия y^M:

$$p(y^M_{\Sigma}) + p'(y^M_{\Sigma})y^M_{\Sigma} = c'_j(y^M_j). \tag{75}$$

Как видим, картель так распределит объемы производства между предприятиями, чтобы предельные издержки были равными.

Ясно, что картель неустойчив, если нет способа гарантировать выполнение соглашения между фирмами. Пусть, например, достигнуто соглашение о квотах выпуска ($y_j = y^M_j$). Тогда каждой фирме выгодно производить больше своей квоты. Если она немного увеличит объем производства, то ее прибыль возрастет: при $dy_j > 0$, учитывая (75), имеем $d\pi_j = (p(y^M_{\Sigma}) + p'(y^M_{\Sigma})y^M_j - c'_j(y^M_j)))dy_j = -p'(y^M_{\Sigma})(y^M_{\Sigma} - y^M_j)dy_j > 0$.

Модель Курно.

Пусть общая для всех цена есть функция $p(.)$ от суммарного выпуска y_{Σ}. Каждый участник назначает свой выпуск y_j, и максимизирует прибыль, ориентируясь на выпуск остальных y_{-j}, и обратную функцию спроса $p(.)$. Реакцию j-й фирмы на действия конкурентов y_{-j} описывается следующей функцией отклика:

$$\mathcal{Y}_j(y_{-j}) := \arg\max_{y_j} \pi_j(y) := \arg\max_{y_j} p(y_{\Sigma})y_j - c_j(y_j). \tag{76}$$

Определение 5.4.1 *Равновесие олигополии по Нэшу-Курно*[34] *есть такой набор объемов производства y, что $y_j \in \mathcal{Y}_j(y_{-j}) \quad \forall j = 1, ..., n$.*

Решая задачу максимизации прибыли каждым производителем $p(y_{\Sigma})y_j - c_j(y_j) \to \max_{y_j \geq 0}$, получим дифференциальную характеристику равновесия в модели Курно:

$$p(y^N_{\Sigma}) + p'(y^N_{\Sigma})y^N_j = c'_j(y^N_j) = c_0. \tag{77}$$

В равновесии Курно объем производства с точки зрения олигополистов неоптимален. Если бы любая из фирм снизила свой выпуск на дифференциально малую величину, то тем самым общая прибыль выросла бы.

Проиллюстрировать ситуацию и показать, что такая олигополия выпускает больше Парето-оптимального количества продукции (с точки зрения ее участников) для случая дуополии можно графически (Рис.3 б). На рисунке изображены кривые постоянной прибыли ($\pi_1(y_1, y_2) = const$ и $\pi_2(y_1, y_2) = const$) и кривые отклика ($y_1 = \mathcal{Y}_1(y_2)$ и $y_2 = \mathcal{Y}_2(y_1)$), которые можно определить как множество точек, где касательные к кривым равной прибыли параллельны соответствующим осям координат. Точка пересечения кривых отклика является равновесием Нэша-Курно (y^N). Поскольку, как и везде, в точке равновесия касательные к кривым равной прибыли перпендикулярны друг другу, значит, возможен Парето -улучшающий сдвиг (на рисунке показан стрелкой).

Пример 5.4 *Пусть функция цен линейна: $p(y) = a - by$, а функция затрат имеет вид $c_j(y_j) = dy_j$ $(j = 1, .., n)$, так что каждая фирма максимизирует $\pi_j = (a - by_{\Sigma})y_j - dy_j$. В этих условиях равновесный объем выпуска равен $y^N_{\Sigma} = \frac{n}{n+1}\frac{a-d}{b}$ (в частности, при*

[34] Имя Нэша добавляют, чтобы подчеркнуть связь с равновесием по Нэшу в теории игр.

дуополии $y_{\Sigma}^{N} = \frac{2(a-d)}{3b}$). Объем производства в случае картеля был бы равен $y_{\Sigma}^{M} = \frac{a-d}{2b}$, откуда ясна неоптимальность равновесия Курно с точки зрения производителей (они могли бы получать больше прибыли, если бы производили меньше). Выпуск в случае совершенной конкуренции был бы равен максимальному спросу $y_{\Sigma}^{C} = \frac{a-d}{b}$, откуда ясна неоптимальность равновесия Курно с общественной точки зрения (недопроизводство нужного еще товара).

При увеличении количества фирм в олигополии ситуация все больше сближается с ситуацией совершенной конкуренции.

Модель дуополии Штакельберга

Считаем, что один из участников (первый) ведет себя как лидер, назначая выпуск, и прогнозирует отклик второго по (76), так что его задача примет вид:

$$\pi_1 = y_1 p(y_1 + \mathcal{Y}_2(y_1))y_1 - c_1(y_1). \tag{78}$$

Пример 5.5 *Для ситуации Примера 5.4 в равновесии Штакельберга функция отклика второго равна $\mathcal{Y}_2(y_1)) = \frac{a-d-by_1}{2b}$, откуда $\pi_1 = \frac{a-d}{2}y_1 - \frac{b}{2}(y_1)^2$. Максимум достигается при $y_1 = \frac{a-d}{2b}$. Кроме того, в равновесии $y_2 = \frac{a-d}{4b}$, $y_{\Sigma} = \frac{3(a-d)}{4b}$ что больше, чем выпуск в модели Курно, но меньше, чем при совершенной конкуренции, то есть имеется неоптимальность.*

Модель олигополии с ценовым лидерством

Лидер (фирма с номером 1) назначает цену p, а остальные ($j = 2, ..., n$) выбирают выпуск, считая цену фиксированной, так что их функции отклика имеют вид $\mathcal{Y}_j(p) := \arg\max_{y_j} py_j - c_j(y_j)$.

Лидер выбирает цену зная эти функции отклика. Он может выпустить продукции в размере спроса, неудовлетворенного остальными: $y_1 = (D(p) - \sum_{j=2}^{n} \mathcal{Y}_j(p))$. Таким образом, лидер решает задачу

$$\pi_1 = [(D(p) - \sum_{j=2}^{n} \mathcal{Y}_j(p))p - c_1(D(p) - \sum_{j=2}^{n} \mathcal{Y}_j(p))] \to \max_{p}. \tag{79}$$

Модель Бертрана

В модели Бертрана стратегиями участников являются назначаемые цены p_j. Каждая из фирм, близоруко (поведение типа Нэша) считает текущие стратегии остальных p_{-j} фиксированными. При этом делаются следующие предположения:

1) Если цена, назначенная фирмой, выше цены любой другой фирмы, то она не сможет продать свою продукцию: $y_j = 0$.

2) Группа фирм, назначившая минимальную цену разделит рынок как в равновесии Нэша-Курно, в частности, при равных функциях издержек окажется, что $y_j = D(p_{min})/(k+1)$, а если такая фирма одна, то $y_j = y_{\Sigma} = D(p_j)$.

В этих условиях довольно легко показать, что равновесие не может установиться ни в какой точке, кроме точки конкурентного равновесия, где предельные издержки равны цене. Дело в том, что иначе каждый понизив цену хотя бы чуть-чуть, сразу получил бы весь объем спроса. Итак, если ценовая конкуренция олигополистов носит такой характер, то равновесие окажется конкурентным и Парето - оптимальным.

Олигополия на рынке дифференцированных благ

Мы рассмотрели модели олигополии, в которых фирмы производили один и тот же товар. Теперь рассмотрим более распространенный случай, когда продукция фирм не вполне взаимозаменяема. Это означает, что производители действуют на взаимосвязанных рынках "близких" товаров, которые различаются хотя бы по упаковке и потребитель способен покупать их по разным ценам p_j.

Модели поведения на рынке таких дифференцированных благ можно классифицировать так же, как это сделано выше в случае рынка одного блага. Наиболее существенное отличие отличие наблюдается, когда фирмы одновременно устанавливают цены.

В этой модели следует ввести отдельную функцию спроса на продукцию каждой фирмы $y_j = y_j(p_j, p_{-j})$, которая зависит от собственной цены p_j и от цен конкурентов p_{-j}. Естественно предположить, что эластичность спроса по собственной цене отрицательна ($\varepsilon_{jj} < 0$), а по ценам конкурентов положительна ($\varepsilon_{ij} = \frac{dy_i}{dp_j}\frac{p_j}{y_i} > 0$ при $i \neq j$)[35]. Отличие от модели Бертрана заключается в том, что спрос переключается к понижающему цену не с бесконечной эластичностью.

Поскольку участники не учитывают, как их действия влияют на других, то их поведение соответствует модели простой монополии и дифференциальная характеристика равновесия имеет вид

$$p_j(1 - 1/|\varepsilon_{jj}|) = c_j'. \tag{80}$$

Если бы каждая фирма немного повысила свою цену, то общая прибыль возросла бы. Поэтому равновесие при монополистической конкуренции не оптимально с точки зрения олигополистов.

Они могли бы объединиться в картель. Такой картель по сути являлся бы дискриминирующей монополией. В отличие от рассмотренного выше случая (Пример 5.2) перекрестные эластичности не равны нулю, поэтому максимум прибыли достигается при выполнении условий

$$p_j(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{jj}|}) - \sum_{i \neq j} p_i \frac{\varepsilon_{ij}}{|\varepsilon_{jj}|} = c_j'. \tag{81}$$

Пример 5.6 *В ситуации ценовой конкуренции двух производителей спрос на товар первого равен* $y_1(p_1, p_2) = \frac{p_2{}^{\beta}}{p_1{}^{\alpha+1}}$, *спрос на товар второго* $y_2(p_1, p_2) = \frac{p_1{}^{\beta}}{p_2{}^{\alpha+1}}$, *затраты обоих линейны* $c_j(y_j) = \gamma y_j$ *(*$\alpha, \beta, \gamma > 0, \quad \beta \leq \alpha$*). Подставив* $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -(\alpha+1)$ *в (80), найдем, что предприятия имеют доминирующие стратегии* $p_1 = p_2 = \frac{(\alpha+1)\gamma}{\alpha}$. *При этом в равновесии объемы производства будут* $y_1 = y_2 = (\frac{\alpha}{(\alpha+1)\gamma})^{1+\alpha-\beta}$.

Дуополию такого вида можно изобразить на диаграмме, аналогичной Рис. 3. Только по осям должны стоять не объемы производства, а цены, и кривые равной прибыли будут развернуты в противоположную сторону. Функции отклика, соответствующие доминирующим стратегиям, на рисунке будут выглядеть как прямые, параллельные осям, а равновесием будет точка их пересечения.

Если предприятия объединятся в картель, то, учитывая $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \beta$, *из (81) найдем, что этот картель установил бы* $p_j = \frac{(\alpha+1-\beta)\gamma}{\alpha-\beta}$, *то есть более высокие цены, при более низких объемах производства* $y_1 = y_2 = (\frac{\alpha-\beta}{(\alpha+1-\beta)\gamma})^{1+\alpha-\beta}$.

Если бы фирмы устанавливали не цены, а объемы производства, то при "Нэшевском" поведении каждая фирма максимизировала бы свою прибыль, подставив в

[35] Эта же модель подходит и когда фирмы производят не взаимозаменяемые блага (субституты), а взаимодополнительные (комплементы).

нее обратную функцию спроса $p_j = p_j(y_j, y_{-j})$[36], считая объемы производства других участников фиксированными. Очевидным образом на ситуацию дифференцированных благ можно распространить и модели олигополии с поочередным принятием решений.

Пример 5.7 *В ситуации предыдущего примера обратные функции спроса равны* $p_1(y_1, y_2) = \frac{1}{{y_1}^{\alpha'}{y_2}^{\beta'}}$ *и* $p_2(y_1, y_2) = \frac{1}{{y_2}^{\alpha'}{y_1}^{\beta'}}$*, где* α'*,* β' *— функции исходных параметров. В равновесии* $p_1 = p_2 = \frac{\gamma}{1-\alpha'}$ *и* $y_1 = y_2 = (\frac{1-\alpha'}{\gamma})^{1+\alpha-\beta}$*. Предоставляем читателю самому проверить, что цены будут выше, чем при ценовой конкуренции, но ниже, чем при сговоре.*

Отметим тенденцию, что когда фирмы выбирают цены, то конкуренция более интенсивна, чем когда они выбирают объемы производства (сравните равновесие Курно с равновесием Бертрана).

6 Влияние налогов и издержек сделок на цены и выигрыши участников

Следующее отклонение от совершенной конкуренции, которое мы рассмотрим — издержки сделок и налоги. Эти факторы также способны приводить к неоптимальности равновесий. Мы в дальнейшем будем говорить только о налогах, подразумевая, что некоторые из издержек сделок, в частности, маржа между верхней и нижней ценой, устанавливаемая посредниками в торговле — действуют в точности как налоги с продаж. В этих случаях "налог" можно читать как "маржа".

В этой главе, как и в предыдущей, будет рассматриваться только ситуация частного равновесия.

6.1 Налог на рынке одного товара

В этом разделе мы снова будем исследовать проблему экономической эффективности (оптимальности), опираясь на концепцию излишка потребителя и производителя. Мы рассмотрим два основных вида налогов: налог с единицы товара (англ. unit tax) и налог со стоимости товара (лат. ad valorem). Наличие налога означает, что имеется не одна, а две рыночные цены: верхняя или цена потребителя (p^H) и нижняя или цена производителя (p^L). Разница между верхней и нижней ценой идет в доход государства. При налоге с единицы товара эта разница фиксирована: $p^H - p^L = t$, где t — ставка налога. В случае налога со стоимости указанная разница пропорциональна цене. Если это налог на потребителя, то $p^H = p^L(1 + \tau)$, а если на производителя, то $p^L = p^H(1 - \tau)$ где τ — ставка налога. Конкурентный рынок с налогом показан на Рис. 4.

Использование концепции излишка делает осмысленным вопрос о том, "кто заплатит налог". Ответ на него не зависит от того, кто юридически — производитель или потребитель — облагается налогом. Если влияние двух налогов на точку равновесия и, следовательно, благосостояние производителей и потребителей одинаково, то они с экономической точки зрения эквивалентны. Важнее знать, насколько налог меняет верхнюю цену (цену покупателя) и нижнюю цену (цену продавца).

[36]Не для всякого набора функций спроса можно найти набор обратных функций спроса.

Для иллюстрации выдвинутого тезиса об эквивалентности заметим, что налог в размере t с продаваемой единицы блага — это все равно что налог в размере t с покупаемой единицы блага (см. Рис. 4 а, где соответствующие вспомогательные кривые спроса и предложения отмечены штрихами). Так же точно налог вида $p^L = p^H(1-\tau)$, эквивалентен налогу $p^H = p^L(1+\tau^*)$, где $\tau^* = \frac{\tau}{1-\tau}$.

При совершенной конкуренции, как уже говорилось в предыдущем разделе, весь потенциальный выигрыш от существования рассматриваемого рынка делят между собой производители и потребители. Если государство вводит налог, то и излишек производителя, и излишек потребителя уменьшаются. Но не все из того, что теряют участники торговли получает государство. Происходит чистая потеря благосостояния. Налог, таким образом, приводит к неоптимальности.

Понятно, что экономические субъекты будут сокращать ту деятельность, которая облагается налогом, чтобы уменьшить свои потери от него. С другой стороны, при этом растут потери общества. Чем больше эластичность спроса (предложения), тем выше чистые потери. Если спрос или предложение абсолютно неэластичны (имеют эластичности равные нулю), то чистые потери равны нулю — государство собирает ровно столько, сколько теряют от налога участники торговли.

Здесь и ниже мы говорим об эластичности, хотя для линейных функций спроса и предложения, видимо, лучше говорить о производных. Кроме того, важно помнить, что эластичность в общем случае не постоянна, поэтому всегда подразумевается эластичность на некотором отрезке, например от равновесия без налога до равновесия с налогом.

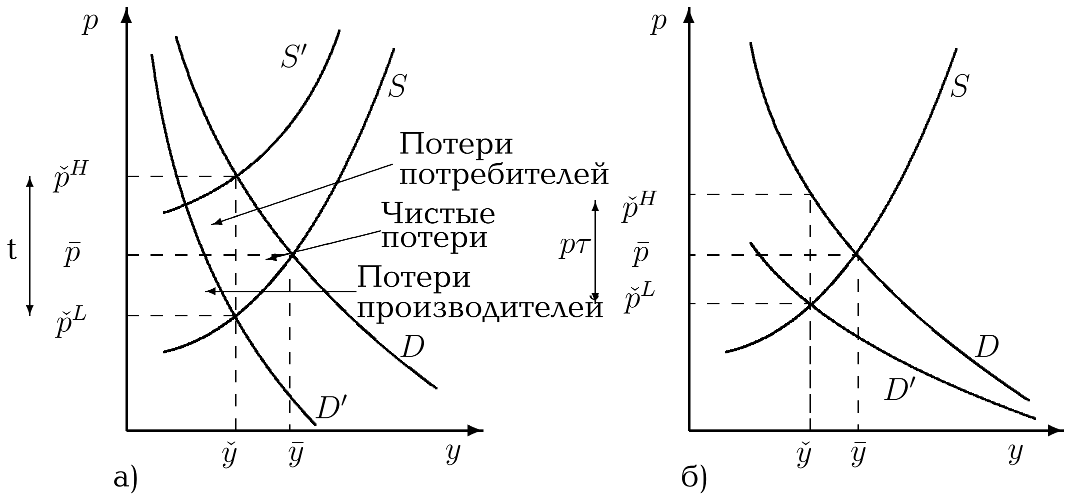


Рис. 4: Налог на отдельном конкурентном рынке а) с единицы товара, б) со стоимости.

Что произойдет после введения налога — сильнее вырастет верхняя, или сильнее опустится нижняя цена — зависит от эластичностей спроса и предложения. Следовательно, от соотношения эластичностей зависят и относительные размеры потерь потребителей и производителей, то есть, кто платит налог.

Посмотрим, какими должны быть последствия введения налога в четырех крайних случаях.

- Если эластичность спроса равна нулю, а эластичность предложения больше нуля, то цена производителей не меняется, а цена потребителей изменяется на величину налога, так что вся тяжесть налога падает на потребителей. Объем продаж на рынке не меняется и чистое бремя налога равно нулю.

- Если эластичность предложения равна нулю, а эластичность спроса больше нуля, то цена потребителей не меняется, а цена производителей изменяется на величину налога, так что вся тяжесть налога падает на производителей. Объем продаж на рынке не меняется и чистое бремя налога равно нулю.

- Если эластичность спроса бесконечная, а эластичность предложения конечная, то цена потребителей не меняется, а цена производителей изменяется на величину налога, так что вся тяжесть налога падает на производителей. Объем продаж на рынке в общем случае сокращается и чистое бремя налога положительно.

- Если эластичность предложения бесконечная, а эластичность спроса конечная, то цена производителей не меняется, а цена потребителей изменяется на величину налога, так что вся тяжесть налога падает на потребителей. Объем продаж на рынке в общем случае сокращается и чистое бремя налога положительно.

Интересно исходя из приведенных выше соображений решить задачу: как обложить налогами группу отраслей, чтобы достичь заданного объема сборов, а сумма чистых потерь бы была минимальна? Критерий такой оптимальности дает **формула Рамсея**, вывод которой мы не приводим[37]:

$$\frac{t^k}{p^{Lk}} = \frac{\lambda(\frac{1}{|\varepsilon_D^k|} + \frac{1}{\varepsilon_S^k})}{1 + \lambda - \frac{1}{|\varepsilon_D^k|}}. \tag{82}$$

Здесь k — номер блага, t^k — налог на единицу блага, p^{Lk} — цена производителя, $|\varepsilon_D^k|$ — абсолютная величина эластичности спроса, ε_S^k — эластичность предложения, λ — константа, множитель Лагранжа в соответствующей задаче условной максимизации. Из формулы следует, что чем меньше эластичность спроса (или предложения) товара, тем больший налог на него нужно установить. На самом деле этот вывод является результатом неполноты модели. В ней не учитывается влияние рынков друг на друга и на остальную экономику, что приводит к умеренным искажениям в случае отдельного небольшого рынка, но к чрезмерным — в случае группы взаимосвязанных или крупных рынков.

На графической модели можно показать, что налог типа ad valorem дифференцирует (распределяет) налоги между отраслями в примерно том же направлении, что и формула Рамсея: налог окажется больше там, где эластичности спроса и предложения меньше, при прочих равных условиях.

Налоги в монополизированной отрасли лучше рассмотреть на конкретном примере.

Пример 6.1 *Пусть функция спроса линейна, так что $p^H = a - by$, предельные издержки монополии постоянны (d), и рынок действует в условиях налога $p^L = p^H - t$. Как обычно, рассматривая максимизацию прибыли монополии, получим, что в равновесии $\check{y} = \frac{a-t-d}{2b}$, $\check{p}^H = \frac{a+t+d}{2}$ и $\check{p}^L = \frac{a-t+d}{2}$. В равновесии без налога $\bar{y} = \frac{a-d}{2b}$ и $\bar{p} = \frac{a+d}{2}$. Равновесная цена для потребителя окажется после введения налога выше ровно на половину налога, а для производителя — на половину налога ниже.*

[37] В оригинале формула Рамсея показывает, что $\frac{t^k}{p^k}$ должны быть пропорциональны $\frac{1}{|\varepsilon_D^k|} + \frac{1}{\varepsilon_S^k}$. Приведенная формула более общая.

Без налога чистые потери на монопольном рынке равны $\frac{1}{2}(\bar{p}-d)(y^C-\bar{y})=\frac{(a-d)^2}{8b}$, *где* $y^C=\frac{a-d}{b}$ *— цена совершенной конкуренции. При введении налога потери возрастают:* $\frac{1}{2}(\check{p}^H-d)(y^C-\check{y})=\frac{(a+t-d)^2}{8b}>\frac{(a-d)^2}{8b}$

Можно сравнить налоги с единицы товара и со стоимостного объема продаж. Государство может, используя второй вид налогов (ad valorem), получить больший объем сборов, чем используя первый вид (unit tax). При этом благосостояние потребителей не изменится, теряет только монополия. Этот вывод можно обратить: налог ad valorem может обеспечить равный с unit tax сбор, меньше повредив потребителю (и меньше принеся "чистых потерь").

В данном примере производитель и потребитель "поровну заплатят налоги". В общем случае это не так. Например в случае спроса с постоянной эластичностью, прирост верхней цены может оказаться как выше, так и ниже прироста налога — в зависимости от эластичности.

В большинстве ситуаций, как и в примере, от налога теряют и производитель и потребитель, а чистые потери, и так ненулевые благодаря монополизации, еще возрастают.

6.2 Налог и поведение потребителя

Далее мы рассмотрим влияние налогов на потребительский выбор. К обсуждавшимся выше двум видам налогов добавим третий — подушный (фиксированный) налог T, вычитаемый из дохода. Пусть отдельный потребитель выбирает объемы потребления, располагая фиксированным доходом d. Задача вычисления спроса рассматриваемого потребителя имеет обычный вид вид (индекс потребителя для простоты опускаем):

$$\mathcal{X}(p,t,\tau,T)=\arg\max_{x\geq 0 \quad x\in B(p,t,\tau,T)}u(x). \tag{83}$$

Поведение потребителя меняется, потому что меняется вид его бюджетного ограничения. Для разных налогов это ограничение имеет вид:

налог на единицу товара —

$$(p+t)x\leq d, \tag{84}$$

налог на стоимость —

$$\sum_{k\in K}(1+\tau^k)p^kx^k\leq d, \tag{85}$$

подушный налог —

$$px\leq d-T. \tag{86}$$

Проанализируем, когда налоги являются, а когда не являются Парето-оптимальными. В данной ситуации Парето-оптимальность понимается в специфическом смысле. Мы имеем двух участников, максимизирующих свои целевые функции. Потребитель максимизирует полезность. Государство максимизирует сбор налогов. Как обычно, если никто из участников не может улучшить свое состояние, не ухудшая состояние другого участника, то имеет место оптимум.

Прежде всего отметим, что обложение подушным налогом приводит к эффективному по Парето состоянию. Потребитель максимизирует свою полезность при условии, что фиксированную сумму T из своего дохода должен отдать государству. А это и есть задача отыскания Парето-оптимума. Точно так же эффективным будет обложение потребителя униформным по товарам налогом с единицы товара ($t^k/p^k=const$)

или со стоимости ($\tau^k = const$). Действительно, при такой схеме налогообложения отношения цен остаются неизменными и потребитель выберет те же самые объемы потребления, как и в случае, если бы он заплатил соответствующий фиксированный налог. В частности, при $\tau^k = \tau$ бюджетное ограничение (85) равносильно бюджетному ограничению (86) при $T = \frac{d\tau}{1+\tau} = \tau p\check{x}$, где $\check{x}$ — равновесие потребителя в условиях налога τ.

С другой стороны, если налог изменяет отношение цен, то такой налог будет неэффективным. Будем предполагать, что равновесие внутреннее, функция u дифференцируема (линии уровня гладки) и строго возрастает по всем аргументам. До введения налога вектор цен был равен p, а после введения налога вектор цен потребителя с учетом налога равен $\check{p}$ ($\check{p}^k = p^k + t^k$ и $\check{p}^k = p^k(1+\tau^k)$ для двух рассматриваемых видов налогов). Пусть цены потребителя для любых двух благ изменились не в равной пропорции, например,

$$\check{p}^1/\check{p}^2 > p^1/p^2. \tag{87}$$

Можно показать, что при той же величине сбора налогов потребитель мог бы улучшить свое благосостояние. Диф. характеристика равновесия потребителя $\check{x}$ как всегда имеет вид

$$\check{p}x = d \tag{88}$$

$$\frac{\dot{u}_1^k(\check{x})}{\dot{u}_2^k(\check{x})} = \frac{\check{p}_1^k}{\check{p}_2^k} \quad \forall k_1, k_2 \in K. \tag{89}$$

Произведем дифференциально малый сдвиг из точки равновесия, при условии, что он не изменяет доход государства: $p(\check{x}+dx) = d-(\check{p}-p)\check{x}$. Этому условию удовлетворяет сдвиг $dx^1 > 0$ и $dx^2 = -\frac{p^1}{p^2}dx^1$. При этом полезность потребителя увеличивается:

$$du = \dot{u}^1(\check{x})dx^1 + \dot{u}^2(\check{x})dx^2 = \dot{u}^2(\check{x})dx^1(\frac{\dot{u}^1(\check{x})}{\dot{u}^2(\check{x})} - \frac{p^1}{p^2}) = \dot{u}^2(\check{x})dx^1(\check{p^1}/\check{p^2} - \frac{p^1}{p^2}) > 0. \tag{90}$$

Тем самым доказана неэффективность не униформного налога.

Продемонстрируем это графически в частном случае, когда имеется только два блага, и одно из благ (первое) облагается налогом, а другое нет (см. Рис. 5 а). Введение налога вызывает поворот бюджетной прямой ($B \to \check{B}$) и переход потребителя к новому равновесию ($\bar{x} \to \check{x}$). Рассмотрим поведение потребителя при бюджетном ограничении (B^*), "параллельном" первоначальному (B) и проходящем через точку равновесия, как если бы ввели эквивалентный подушный налог. Поскольку вспомогательная бюджетная прямая пересекает кривую безразличия, то, двигаясь по ней, потребитель может увеличить свою функцию полезности без снижения величины налога. На рисунке направление такого Парето-улучшения показано стрелкой.

Возрастет ли или уменьшится потребление благ при изменении цен (налогов)?. Для того, чтобы это узнать, изменение раскладывают на две составляющие: **эффект дохода** (income effect) получаемый параллельным сдвигом бюджетной линии, и **эффект замены** (substitution effect), получаемый поворотом бюджетной линии вокруг одной и той же линии уровня (поворотом, сохраняющим неизменную полезность). Иногда эти составляющие определяют иначе: сначала параллельный сдвиг бюджетной линии до новой точки равновесия (эффект дохода), а затем поворот бюджетной линии вокруг точки равновесия (эффект замены). Те же эффекты будут другими, если двигаться в противоположном направлении. Таким образом, для конечных приращений имеются четыре различных определения эффектов дохода и замены. Если

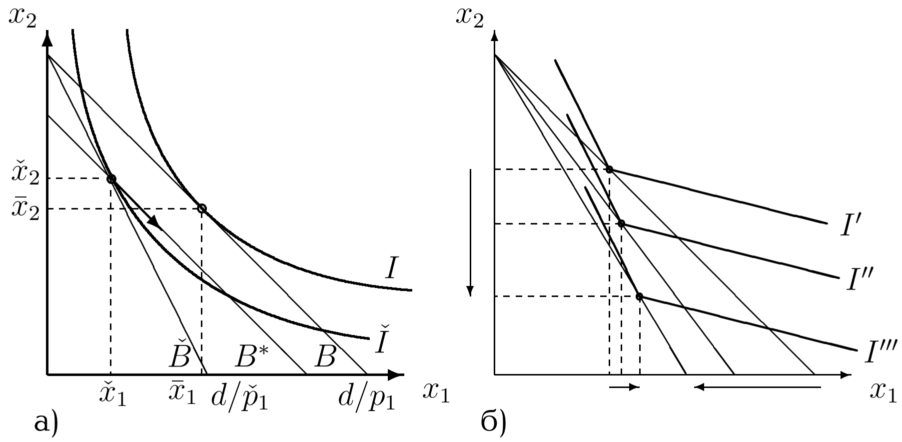


Рис. 5: Поведение потребителя в условиях налога: а) неоптимальность неуниформного налога: б) товар Гиффена.

функция полезности дифференцируема, то для бесконечно малых приращений все четыре определения совпадают.

Благо называют **низшим**, если при увеличении дохода потребителя спрос на него падает. Благо называют **товаром Гиффена**, если при увеличении его цены спрос на него растет. Товар Гиффена всегда является низшим. Оба эти свойства являются локальными, и благо может перестать обладать ими при изменении условий (дохода и цен).

Предполагая о линиях уровня целевой функции u лишь наиболее распространенное свойство — что все товары не являются низшими (а следовательно, и товарами Гиффена) — можно предсказать, что при введении налога на некоторое благо эффект замены и эффект дохода в отношении спроса на него действуют в одном направлении и потребление этого блага должно снизится. Но на основе только этого предположения, без более конкретных сведений об u, нельзя однозначно предсказать изменение потребления остальных благ, т. к. эффекты замены и дохода по отношению к ним действуют в противоположных направлениях и все зависит от того, какой из эффектов перевесит.

Если же товар является товаром Гиффена, то обложение его налогом приведет к увеличению его потребления (см Рис.5 б).

Вывод о преимуществах униформных налогов трудно применить на практике, поскольку невозможно наблюдать и облагать все блага, все сферы деятельности. Налоговые службы умеют облагать налогами покупаемые товары, но не изготовленные самими потребителями, работу, но не отдых. Эти "перекосы" налогообложения приводят к неоптимальности.

Завершая этот раздел, отметим, что если при выборе налоговой системы не принимать во внимание проблему платежеспособности и проблему социальной справедливости (многие избиратели считают, что богатые и платежеспособные должны платить больше), то идеальным налогом является только фиксированный, подушный (неважно — одинаковый или различный для индивидов). Дифференцировать подушный налог в зависимости от потенциальной платежеспособности невозможно, поскольку она ненаблюдаема. Наблюдаемая же платежеспособность зависит от усилий людей и обложение налогом в соответствии с ней приводит к снижению стимула делать эти усилия. Эффективная по Парето система налогов вряд ли возможна. Реальные системы являются компромиссами между различными нежелательными эффектами.

7 Неопределенность и риск

Принятие экономическим субъектом решений в условиях неопределенности означает, что его благосостояние в будущем зависит от двух факторов: его решения в данный момент и от того, какое состояние мира реализуется в будущем: какая будет погода, экономическая конъюнктура и т. п. Что именно произойдет, человек, принимающий решение, может только догадываться. Когда же определенное состояние реализуется, то принятое решение уже нельзя изменить.

7.1 Предпочтения потребителя в условиях неопределенности

Модифицируем модель потребителя, чтобы учесть в ней неопределенность. Прежде всего к параметрам экономики добавляется множество состояний мира Q. Мы будем считать его конечным. Таким образом, экономические переменные будут иметь кроме индекса блага $k \in K$ еще и индекс состояния мира $q \in Q$. Потребляемый набор благ для i-го потребителя будет $x_i = \{x_i^{kq}\}$. От него, как и раньше, зависит полезность потребителя.

Функцию полезности будем обозначать $U_i(.)$. В дальнейшем в этом разделе индекс i будем опускать. Подразумевается, что в этой целевой функции учтены как полезности для него каждого товара в каждом состоянии мира (например, зонт полезнее в дождь), так и его личные гипотезы о вероятностях событий.

Участники могут действовать по разному в условиях риска, другими словами, иметь разное отношение к риску, которое определяется формой их целевой функции.

Определение 7.1.1 *Потребитель называется имеющим (строгое)* неприятие риска, *если его целевая функция $U(.)$ (строго) квазивогнута, и* нейтральным к риску, *если она линейна.*

Частный, но наиболее часто используемый и удобный для анализа случай целевой функции U есть функция аддитивная по вероятностям или, иначе, функция Неймана-Моргенштерна:

$$U(x) = \sum_{q \in Q} \mu_q u(x^{*q}) \ , \tag{91}$$

где $\mu_q \in [0,1]$, $\sum_q \mu_q = 1$ — гипотезы участника о вероятностях событий $q \in Q$, и $u(x^{*q}) : \ I\!R^l \mapsto I\!R$ — элементарная функция полезности участника, не зависящая от состояний мира, а только от потребления благ как таковых. Вероятности, заложенные в функции полезности участника могут быть и ошибочными, поэтому их называют субъективными вероятностями.

Полезность по Нейману-Моргенштерну, таким образом есть (субъективное) математическое ожидание полезности или просто ожидаемая полезность.

Оказывается (см. теорему из раздела XI.6 Маленво), если наблюдаемые нами предпочтения участника удовлетворяют трем свойствам: непрерывности, выпуклости и независимости от состояния мира как такового (только от вероятности "лучших" исходов), то эти предпочтения всегда можно описать как решения оптимизационной задачи с функцией полезности Неймана-Моргенштерна, подобрав подходящую элементарную функцию полезности u. Это оправдывает применение такой функции в микроэкономическом моделировании.

В терминах функции Неймана-Моргенштерна переопределим отношение к риску.

Определение 7.1.2 *Участник i с глобальной функцией полезности U типа Неймана-Моргенштерна называется имеющим* неприятие риска, *если его элементарная функция полезности $u(\cdot)$ (строго) вогнута,* нейтральным к риску, *если она линейна, и* предпочитающим риск — *если она (строго) выпукла.*

Определение 7.1.3 *Функция $u(.)$ вогнута, если из $\alpha \in (0,1)$ следует $u(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \geq \alpha u(x') + (1-\alpha)u(x'')$.*

Функция $u(.)$ квазивогнута[38]*, если из $\alpha \in (0,1)$ следует $u(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \geq \min\{u(x'), u(x'')\}$.*

Можно показать, что из определения неприятия риска в терминах u следует определение неприятия в терминах U, (но не обязательно наоборот). Из вогнутости u следует вогнутость U, а следовательно и квазивогнутость.

Часто используют функцию полезности, зависящую от единственного блага — денег. Количество денег, которое получает индивидуум в состоянии мира q (x^q) будем называть доходом или доходностью. При этом используют следующие понятия (индекс блага опускаем).

Определение 7.1.4 Ожидаемый доход — *это (субъективное) математическое ожидание дохода:*

$$E(x) = \sum_{q \in Q} \mu^q x^q. \tag{92}$$

Определение 7.1.5 Безрисковым или гарантированным *называется такой потребительский набор x, что в любом состоянии мира потребитель имеет один и тот же доход: $x^q = E(x)$.*

Определение 7.1.6 Безрисковым или гарантированным эквивалентом[39] *данного потребительского набора x называется безрисковый потребительский набор $\tilde{x}$, дающий ту же самую полезность:*

$$U(x) = \sum_{q \in Q} \mu^q u(x^q) = U(\tilde{x}) = u(E(\tilde{x})). \tag{93}$$

Определение 7.1.7 *Величина Δx называется* вознаграждением за риск *для данного потребительского набора x, если $E(x) - \Delta x$ является безрисковым эквивалентом x:*

$$U(x) = u(E(x) - \Delta x). \tag{94}$$

Для участника, характеризующегося неприятием риска, вознаграждение за риск для любого рискованного актива положительно, а доход гарантированного эквивалента меньше ожидаемого дохода. Такой участник всегда предпочтет безрисковый потребительский набор рискованному.

Проиллюстрируем введенные понятия с помощью графического примера.

[38] Определение эквивалентно данному ранее. Эквивалентность доказывается от противного.
[39] Англ. certainty equivalent.

Пример 7.1 *На Рис. 6а изображена элементарная функция полезности потребителя с неприятием риска (функция вогнута). Потребитель предполагает, что могут произойти два события (A и B) с некоторыми вероятностями (μ^A и μ^B). Его потребительский набор равен $x = (x^A, x^B)$, где x^A и x^B — доход, который получит потребитель, если произойдут события A и B соответственно.*

Нетрудно догадаться, что точка $(E(x), U(x))$ лежит на отрезке, соединяющей точки $(x^A, u(x^A))$ и $(x^B, u(x^B))$ и делит его в отношении μ^B к μ^A. Здесь $E(x)$ — ожидаемая доходность набора, а $U(x)$ — его полезность. Поскольку потребитель не любит риск, то график функции полезности лежит выше указанного отрезка, и ожидаемая полезность $U(x)$ больше полезности ожидаемого дохода $u(E(x))$. Гарантированный эквивалент $\tilde{x}$ выбирается так, чтобы $u(\tilde{x}) = U(x)$. Плата за риск Δx равна разности между ожидаемой доходностью и доходностью гарантированного эквивалента.

7.2 Индивидуальное равновесие условиях неопределенности

В экономике с неопределенностью естественно ожидать заключения контрактов, условных по событиям. Соответственно, цены благ должны различаться в зависимости от события. Такие цены называют условно-случайными. Бюджетное ограничение потребителя в экономике обмена тогда принимает вид

$$px_i = \sum_{q\in Q}\sum_{k\in K} p^{kq}x_i^{kq} \le \sum_{q\in Q}\sum_{k\in K} p^{kq}w_i^{kq} = pw^i. \tag{95}$$

Задачу потребителя можно записать следующим образом:

$$U_i(x_i) \to \max_{x_i\in B_i(p)} . \tag{96}$$

По сути задача потребителя имеет тот же вид, что и раньше, только индекс блага становится двойным. Дифференциальная характеристика равновесия потребителя тоже совершенно аналогична.

Пример 7.2 *(Страхование имущества). Пусть есть одно благо (деньги), страхуемый имеет капитал w^1, который в случае состояния 1 (непожара) сохранится, а в случае пожара — состояния мира 2 — окажется равным $w^2 < w^1$. Страховая фирма предлагает контракт страхования по цене $\gamma \in [0, 1]$ за единицу страховой суммы, то есть если участник застрахуется на сумму y, то он должен в любом случае заплатить γy, и вправе получить y в случае пожара.*

Таким образом, если пожара не будет, то доход потребителя будет равен $x^1 = w^1 - \gamma y$, если же пожар произойдет, то он будет иметь $x^2 = w^2 - \gamma y + y$. Бюджетное ограничение вида (95) можем получить, исключив y:

$$(1-\gamma)x^1 + \gamma x^2 \le (1-\gamma)w^1 + \gamma w^2.$$

Покупая страховой контракт, потребитель тем самым меняет благо "деньги в состоянии 1" на благо "деньги в состоянии 2" в отношении $p^1/p^2 = (1-\gamma)/\gamma$.

Предположим далее, что потребитель имеет функцию полезности типа Неймана -Моргенштерна $U = (1-\mu)u(x^1) + \mu u(x^2)$, такую что функция $u(.)$ дифференцируема и вогнута (т. е. он характеризуется строгим неприятием риска), где μ — вероятность пожара. Дифференциальная характеристика равновесия потребителя как обычно имеет вид

$$\frac{\partial U/\partial x^1}{\partial U/\partial x^2} = \frac{1-\gamma}{\gamma}. \tag{97}$$

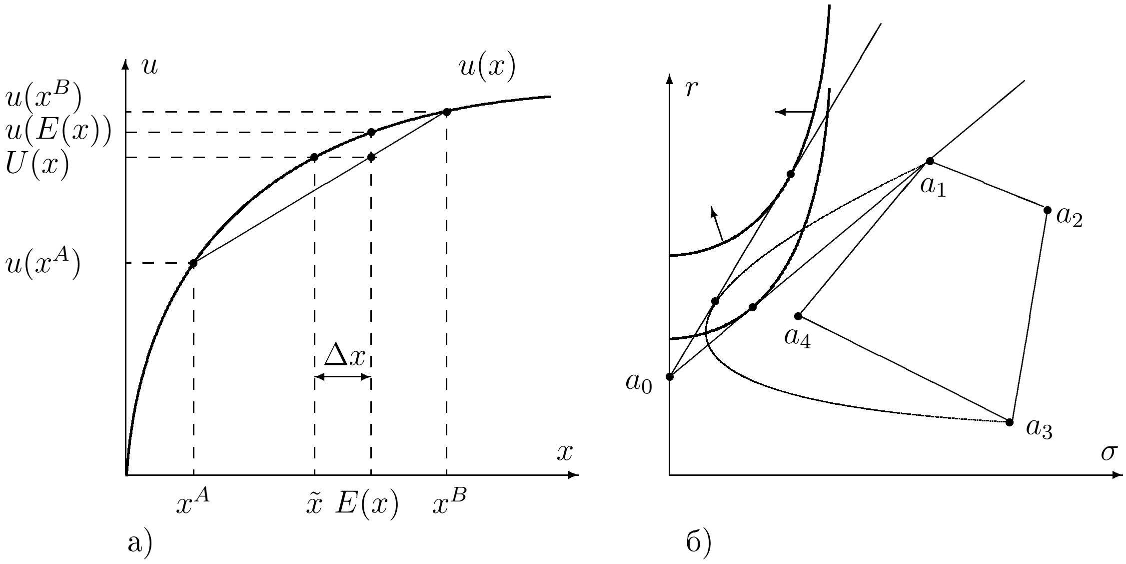


Рис. 6: а) Вознаграждение за риск. б) Модель инвестора с квадратичной целевой функцией.

Отсюда в равновесии $(\frac{1}{\mu} - 1)\dot{u}(\bar{x}^1) = (\frac{1}{\gamma} - 1)\dot{u}(\bar{x}^2)$. *Учитывая, что* $\dot{u}(.)$ *— возрастающая функция, можно сделать следующие выводы.*

При $\gamma = \mu$ *(актуарно справедливая цена страховки) он всегда застрахуется на такую сумму, чтобы* $\bar{x}^1 = \bar{x}^2$, *то есть на всю сумму потенциального ущерба* $w^1 - w^2$. *Если цена будет высокой (*$\gamma > \mu$*), то он застрахуется на такую сумму, чтобы* $\bar{x}^1 > \bar{x}^2$, *то есть на сумму меньшую величины ущерба. Наоборот, при* $\gamma < \mu$ *он застрахуется на сумму, превосходящую ущерб.*

7.3 Задача инвестирования (выбора портфеля)

Рассмотрим задачу распределения одного блага — капитала между несколькими активами ($k = 0, 1, ..., l$). Каждый актив характеризуется своей доходностью (отношением чистого дохода от единицы актива к цене) при различных состояниях мира $q \in Q$ — r_k^q с соответствующими вероятностями этих состояний μ_q. Возможно, первоначально капитал размером $w_{_\Sigma}$ имеется в виде (безрискового) актива номер $k = 0$ (деньги в банке), который имеет гарантированную доходность r_0 независимо от состояния мира. Может быть, начальный запас имеет более общий вид $w = (w_0, ..., w_l) : \sum_k w_k = w_{_\Sigma}$. Инвестор должен выбрать размеры вложений в каждый вид активов z_k при ограничениях $z_k \geq 0$, $\sum_k z_k \leq w_{_\Sigma}$. (Если возможен кредит под процент r_0, то ограничение положительности $z_k \geq 0$ отсутствует). Доход от портфеля активов при состоянии мира q равен $x^q = \sum_k z_k r_k^q$.

Предпочтения инвестора описывается функцией типа Неймана - Моргенштерна
$U(x) = \sum_q \mu_q u(x^q) = \sum_q \mu_q u(\sum_k z_k r_k^q)$
. Поскольку общая величина вложений $w_{_\Sigma}$ постоянна (выбор между накоплением и потреблением остается за рамками модели), то полезность определяется структурой портфеля и можно без ограничения общности заменить величину вложений в k-й актив на его долю в портфеле $\alpha_k = z_k / w_{_\Sigma}$. Получим следующую задачу:

$$U(x) \to max \qquad x^q = \sum_k \alpha_k r_k^q, \quad \alpha_k \geq 0, \quad \sum_k \alpha_k \leq 1 \tag{98}$$

Для упрощения задачи заменим функцию u(.) ее квадратичной аппроксимацией, то есть разложением в ряд Тейлора вплоть до членов только второго порядка в некоторой точке (например, $x = r_0$). Тогда функция $U(.)$ примет вид

$$U = c_0 + c_1 r - c_2 \sigma^2, \tag{99}$$

где $c_i > 0$ - некоторые константы, $r = E(x)$ — ожидаемая доходность портфеля, $\sigma^2 = var(x)$ — дисперсия доходности (рискованность портфеля). Эти величины вычисляются по формулам: $r = \sum_k \alpha_k r_k$, где r_k — ожидаемая доходность k-го актива ($r_k = \sum_q \mu_q r_k^q$), $\sigma^2 = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sigma_{k_1} \sigma_{k_2} \rho_{k_1 k_2}$, где σ_k — корень из дисперсии (среднеквадратическое отклонение) k-го актива ($\sigma_k^2 = \sum_q \mu_q (r_k^q - r_k)^2$), $\rho_{k_1 k_2}$ — коэффициент корреляции ($\rho_{k_1 k_2} = \frac{1}{\sigma_{k_1} \sigma_{k_2}} \sum_q \mu_q (r_{k_1}^q - r_k)(r_{k_2}^q - r_k)$).

В такой упрощенной модели выбора каждый вид акций (актив) характеризуется для инвестора всего двумя параметрами, поэтому задачу инвестирования можно и удобно рассматривать на плоской диаграмме с осями σ, r. На этой диаграмме каждый актив или портфель p активов можно изобразить точкой σ_p, r_p, а кривые безразличия представляют собой параболы с минимумом доходности при нулевом риске ($\sigma = 0$). Рассмотрим ряд легко доказываемых утверждений о характеристиках составных портфелей активов, верных для этой модели. (Для более общей модели верны их аналоги.)

Рассмотрим произвольный портфель $p = (\alpha_0, ..., \alpha_\kappa)$, состоящий из $\kappa + 1$ активов.

1) Ожидаемая доходность портфеля есть средневзвешенная с весами α_k доходность всех составляющих его активов: $r_p = \sum_k \alpha_k r_k$.

2) Если портфель $p = (\alpha_0, \alpha_1)$, составлен из безрискового актива ($k = 0$) и некоторого другого (первого) актива, (возможно, составленного из других активов), то среднеквадратическое отклонение есть $\sigma_p = \alpha_1 \sigma_1$. Таким образом, различные выпуклые комбинации этих активов лежат на отрезке с концами в точках $(0, r_0)$ и (σ_1, r_1). Если можно взять кредит, то возможные комбинации лежат на луче, выходящем из $(0, r_0)$. Этот отрезок/луч — аналог бюджетной прямой. Отсюда следует, что *инвестор с неприятием риска при наличии безрискового актива всегда выберет свой портфель на луче выходящем из* $(0, r_0)$, *имеющем максимальный наклон. Имеется в виду максимум из всех таких лучей, содержащих какие-либо точки — рисковые активы, или точки — комбинации рисковых активов.*

3) Пусть доходность всех активов жестко коррелирована: $\rho_{k_1 k_2} = 1 \quad (\forall k_1,\ k_2 \neq 0)$. Тогда $a = \sum_k \alpha_k \sigma_k$ (риски складываются с весами α, как и доходности) [40], поэтому множество возможных комбинаций активов есть их выпуклая комбинация, то есть представляет собой выпуклый многоугольник с вершинами в точках $(\sigma_k, r_k), k = 0, ..., l$. В этих условиях можно утверждать, что *(а) Без кредита (неважно, при наличии или отсутствии нерискового актива) нестрого предпочитаемым всегда (и строго предпочитаемым "почти всегда") является портфель с не более чем двумя активами, сколько бы ни было предприятий (активов).*
(б) При наличии нерискового актива и возможности кредита это также верно, причем один из двух активов всегда — гарантированный, а второй — актив с максимальным тангенсом наклона $\delta_k = (r_k - r_0)/\sigma_k \ (k \neq 0)$.

3) В случае некоррелированности доходностей активов, (то есть при $\rho_{k_1 k_2} = 0$ для $k_1 \neq k_2$) следует, что $\sigma = \sqrt{\sum_k \alpha_k^2 \sigma_k^2}$.

[40]Такое может происходить, если доходности зависят от фазы экономического цикла или другого общего параметра.

В отличие от предыдущего случая, *риски при некоррелированности не складываются, поэтому риск при комбинировании активов будет снижен. Тогда все активы с доходностью выше гарантированной должны войти в оптимальный портфель (эффект диверсификации).* (Точная формулировка этого утверждения приводится ниже.)

4) *Если доходности двух активов жестко отрицательно коррелированы, то из них можно составить безрисковый портфель. Пусть, например,* ρ_{12}. *Тогда* $\sigma = \sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 - \alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2 + \alpha_2^2\sigma_2^2} = |\alpha_1\sigma_1 - \alpha_2\sigma_2|$. *Чтобы* $\sigma = 0$, *нужно взять* $\alpha_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}, \ \ \alpha_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}$.

5) В общем случае коррелированности, графически различные комбинации доходности и риска достижимые комбинированием любых двух точек (активов) окажутся выпуклым множеством лежащим ниже- правее некоторой кривой соединяющей эти точки и выступающей, при не полной коррелированности, влево. Допустимое множество P всех возможных комбинаций (портфелей), состоящих из рисковых активов для участника будет некоторой выпуклой фигурой. Комбинируя наилучшую по наклону δ точку из P с безрисковым активом как и ранее, получаем наилучший по соотношению риска и доходности (лучший для любого участника!) так называемый "рыночный" портфель. Этими рассуждениями доказывается следующее

Утверждение 7.3.1 *("Mutual Fund Theorem") В описанных условиях, если есть безрисковый актив, если возможен кредит и активы в равной мере доступны каждому инвестору, то все участники выберут портфели с одинаковым соотношением риска и доходности (составного из элементарных) рискового портфеля. Среди их оптимальных решений есть решение всем выбрать одинаковый по структуре рисковых активов портфель (но, возможно, с разными долями безрискового актива). Каждый выберет портфель, для которого наклон* $\delta = (r - r_0)/\sigma$ *максимален.*

Теперь из этой модели отдельных инвесторов с неизменными ценами и доходностями активов сделаем вывод о целом инвестиционном рынке, состоящем из многих таких инвесторов. Из сказанного выше следует, что в первый момент на таком "неравновесном" рынке с кредитом и с жесткой коррелированностью покупались бы, возможно, только активы с одинаковым наклоном δ_k, а остальные пользовались бы нулевым спросом несмотря на различие в предпочтениях риска участников. Вероятно, тогда цены стали бы понижаться, тем самым доходность возрастать, и в общем равновесии доля бы уравнялась у всех активов.

Аналогично и при нежесткой коррелированности активов, поскольку велика вероятность одинаковой структуры рисковых активов, вовсе не обязательно совпадающая со структурой предложения активов, то цены избыточных активов должны падать до тех пор, пока все "рыночные" составные портфели рисковых активов окажутся на одной прямой с равновесным наклоном δ^*.

Теперь рассмотрим эффект диверсификации о котором говорилось выше для функций более общего вида (не обязательно квадратичных).

Утверждение 7.3.2 *Пусть инвестор характеризуется целевой функцией типа Неймана -Моргенштерна с возрастающей вогнутой элементарной функцией полезности* $u(.)$, *пусть доходности статистически независимы* [41] *и ограничение* $\alpha_0 \geq 0$ *несущественно (например, из-за возможности взять кредит). Тогда любой актив,*

[41]Для квадратичной функции достаточно некоррелированности. Утверждение доказывается аналогично.

доходность которого выше доходности безрискового актива ($r_k > r_0$) войдет в портфель, т.е. $\alpha_k > 0$.

Док-во. Функция Лагранжа для задачи инвестора: $L = \sum_q \mu_q u(\sum_k \alpha_k r_k^q) + \lambda(1 - \sum_k \alpha_k) + \sum_{k\neq 0} \nu_k \alpha_k$, где $\lambda \geq 0$ множитель Лагранжа для ограничения $\sum_k \alpha_k \leq 1$, $\nu_k \geq 0$ — для $\alpha_k \geq 0$. Из $dL/d\alpha_0 = 0$ имеем $r_0 \sum_q \mu_q u'(x^q) = \lambda$, а из $dL/d\alpha_k = 0$ имеем $\sum_q \mu_q r_k^q u'(x^q) = \lambda - \nu_k$.

Воспользуемся тем, что мат. ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их мат. ожиданий. При $\alpha_k = 0$ r_k^q и x^q, а следовательно и r_k^q и $u'(x^q)$ независимы. Поэтому получим $\sum_q \mu_q r_k^q \sum_q \mu_q u'(x^q) = r_k \sum_q \mu_q u'(x^q) = \lambda - \nu_k \leq r_0 \sum_q \mu_q u'(x^q)$. Так как $\mu_q u'(x^q) > 0$, то не может быть, чтобы $r_k > r_0$. ▥

7.4 Рынки с неопределенностью и риском

Термин рынок с неопределенностью[42] закрепился за такими ситуациями, где у каждого участника имеются собственные (возможно неверные) представления о вероятностях возможных событий. Частным случаем этой ситуации является рынок, где представления всех участников о вероятностях совпадают, тогда говорят о рынке с риском[43]. Вероятности при этом называют объективными, хотя модели подходят и в том случае, когда все участники одинаково ошибаются.

Рассмотрим общее равновесие в экономике обмена с неопределенностью, учитывая материал предыдущего раздела. Как и прежде, имеется m потребителей и l товаров. $Q = \{1, ..., \hat{q}\}$ — множество всех возможных состояний мира. Условно можно представить, что рассматриваются два момента времени — "сегодня" и "завтра". Предполагается, что *сегодня* заключаются сделки и уравновешиваются рынки, а выполняться сделки будут *завтра*, когда выяснится, какое из состояний мира реализуется.

Элементарным товаром является обязательство (мы будем называть его "билет"), гарантирующее поставку единицы товара $k \in K$ завтра в случае состояния $q \in Q$. Цену такого билета обозначим p^{kq}, а количество билетов, которое решит иметь участник i — x_i^{kq}. Цена платится сегодня, когда неизвестно, какое состояние мира реализуется.

У участника i в каждом из состояний мира q есть потенциальные начальные запасы $w_i^q \in \mathbb{R}^l$, которыми он может располагать, иными словами $w_i \in \mathbb{R}_+^{l\hat{q}}$ — это его начальные запасы всех билетов. Сегодня участники обмениваются между собой только имеющимися у них билетами, поэтому заключают сделки в рамках бюджетного ограничения (95). Каждый из участников максимизирует в рамках такого ограничения свою целевую функцию $U_i(x_i)$. Наличие общей для всех гипотезы о вероятностях не нужно для понимания торговли случайными благами.

Определение Вальрасовского равновесия остается прежним, сбалансированность (16) требуется для каждого из состояний мира $q \in Q$ отдельно: распределение благ всегда должно быть физически допустимым.

Несложно понять, что такая модель рынка ничем не отличается от классической, с точностью до способа нумерации индексов (k, q). Поэтому можно сразу сформулировать следующее утверждение.

[42]Пособие — Маленво, Гл. XI "Неопределенность".

[43]Такое различие между риском и неопределенностью предложил Ф. Найт: Knight F. Risk, Uncertainty and Profit, 1921.

Утверждение 7.4.1 *Первая и вторая Теоремы благосостояния применимы к введенной здесь модели обмена с неопределенностью; то есть совершенный рынок случайных благ дает оптимальные равновесия, и любое Парето-оптимальное состояние реализуемо как рыночное равновесие.*

Пример 7.3 *Есть одно благо — деньги, и два участника встречаются, имея запасы* $w_1 = (1,3)$, $w_2 = (3,1)$ *билетов двух типов: 1 тип гарантирует получение* 1*$ в состоянии мира R (дождь), и ничего при S (солнце), а второй — наоборот, гарантирует единицу только при солнце. Итак, первый, если не обмениваться, может рассчитывать на* 1*$ при дожде и на* 3*$ при солнце, а второй — (3,1). Пусть оба одинаково ценят деньги в любую погоду и считают вероятности состояний 1 и 2 одинаковыми, имея одинаковые целевые функции* $U_i(x_i) = 0.5ln(x_i^R) + 0.5ln(x_i^S)$.

Описанная экономика представляет собой типичный пример "ящика Эджворта только интерпретация переменных специфическая. Здесь речь идет не об обмене обычными ("физическими") благами, а об обмене рисками.

Гипотезы μ_i^q $(q \in Q)$ *разных участников* i *торговли о вероятностях событий* q *не обязаны совпадать. Это не мешает торговле, а иногда и создает ее.*

Пример этого получим изменив параметры экономики: $U_1(x_1) = 0.25ln(x_1^1) + 0.75ln(x_1^2)$, $U_2(x_2) = 0.75ln(x_2^1) + 0.25ln(x_2^2)$. *Здесь первый считает второе событие в три раза вероятнее первого; второй — наоборот. Начальные запасы можно взять одинаковые для обоих:* $w_i = (2,2)$.

Отыскание равновесий оставляем читателю в качестве упражнения. Потребление участников не совпадает с начальными запасами, что и является доказательством утверждения о наличии торговли между ними. Как и предсказывает Утверждение 7.4.1, равновесия Парето-оптимальны.

Известно, что неполнота информации все же представляет проблемы для рынков в реальной жизни. Что-то в сформулированной модели должно быть не так. Очевидно, что модель нереалистична. Нереалистична она не потому, что в ней фигурируют понятия "сегодня "завтра" и "билеты". Ту же самую модель можно интерпретировать достаточно широко, в зависимости от конкретной ситуации.

Основное нереалистичное предположение данной модели — это *наличие полной системы рынков*. Это заранее заложено в формулировке модели в виде *единого бюджетного ограничения*. Содержательно полнота рынков означает, что каждый потребитель может поменять любой товар при любом состоянии мира на любой другой товар в любом другом состоянии мира, неважно, непосредственно или с помощью цепочки обменов.

Рынок с неопределенностью может стать несовершенным, если невозможно обменять ни одно благо в каком-либо состоянии q_1 ни на одно благо в другом состоянии q_2. Такое может быть, если по каким-либо причинам не заключаются соответствующие сделки *условные по состояниям мира*. При этом бюджеты потребителей уже не будут едиными. Потребители тогда имеют отдельные бюджеты в зависимости от состояния мира.

Покажем на примере, что такого рода неполнота рынков действительно может привести к неоптимальности.

Пример 7.4 *Экономика состоит из двух потребителей (1 и 2) и двух благ* (x *и* y). *Два события — "неурожайный год" (B) и "урожайный год" (G) имеют равные объективные вероятности* ($\mu^G = \mu^B = 1/2$). *Элементарные функции полезности имеют вид*

$u_1 = x_1 + y_1$ и $u_2 = \ln x_2 + \ln y_2$. Таким образом, первый участник нейтрален по отношению к риску, а второй не любит рисковать. На участке первого участника растет благо x, а на участке второго участника растет благо y. В урожайный год участники собирают по 6 единиц, а в неурожайный — по 2 единицы соответствующих благ.

Сначала найдем равновесие в ситуации, когда участники обмениваются после сбора урожая. Экономика распадается тогда на две (это будут обычные "ящики Эджворта"), отличающиеся только начальными запасами. Задачи участников имеют следующий вид. Первый максимизирует $u_1 = x_1 + y_1$ при ограничении $p^x x_1 + p^y y_1 \leq p^x w^x$, а второй максимизирует $u_2 = \ln x_2 + \ln y_2$ при ограничении $p^x x_2 + p^y y_2 \leq p^y w^y$, где $(w^x, w^y) = (2, 2)$ при неурожае и $(w^x, w^y) = (6, 6)$ при урожае. Равновесие равно $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2) = (1, 1, 1, 1)$ и $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2) = (3, 3, 3, 3)$ в неурожайный и в урожайный год соответственно.

Нетрудно найти и Парето-оптимум, воспользовавшись его диф. характеристикой (равенство предельных норм замещения). Целевые функции участников равны

$$U_1 = 1/2u_1(x_1^B, y_1^B) + 1/2u_1(x_1^G, y_1^G) = 1/2(x_1^B + y_1^B + x_1^G + y_1^G) \text{ и}$$

$$U_2 = 1/2u_2(x_2^B, y_2^B) + 1/2u_2(x_2^G, y_2^G) = 1/2(\ln(x_2^B) + \ln(y_2^B) + \ln(x_2^G) + \ln(y_2^G)).$$

Во всех Парето-оптимумах $(\hat{x}, \hat{y})$ второй участник должен потреблять поровну каждого блага независимо от состояния мира: $\hat{x}_2^B = \hat{y}_2^B = \hat{x}_2^G = \hat{y}_2^G$. Таким образом, рассмотренное равновесие неоптимально.

Неоптимальность возникает потому, что участники не заключают между собой сделки, условные по событиям. Первый участник, будучи нейтральным к риску мог бы страховать второго участника от неурожая. Бюджетные функции в таком случае станут едиными и примут вид $p^{xB}x_1^B + p^{yB}y_1^B + p^{xG}x_1^G + p^{yG}y_1^G \leq p^{xB}w^{xB} + p^{xG}w^{xG}$ у первого и $p^{xB}x_2^B + p^{yB}y_2^B + p^{xG}x_2^G + p^{yG}y_2^G \leq p^{yB}w^{yB} + p^{yG}w^{yG}$ у второго. Поскольку предельные полезности всех благ для первого участника равны, то цены всех благ должны быть одинаковы. Из диф. характеристики равновесия следует также, что как и во всех точках Парето-оптимума $\bar{x}_2^B = \bar{y}_2^B = \bar{x}_2^G = \bar{y}_2^G$. Отсюда находим равновесие. При неурожае первый имеет набор $(0, 0)$, а второй — $(2, 2)$. В урожайный год первый имеет набор $(4, 4)$, а второй — $(2, 2)$.

Почему могут отсутствовать рынки? Основная причина — отсутствие информации или большие издержки ее получения. Если невозможно отличить, какое именно событие произошло, то невозможно записать в контракте условие вида: "Если произошло такое-то событие, то продавец должен отдать покупателю такое-то количество товара, а покупатель должен заплатить за него по такой-то цене".

8 Рынки с асимметричной информацией

В этом разделе мы продолжим обсуждать последствия неполноты рынков и невозможности заключить некоторые виды сделок. В данном случае нас интересуют рынки, на которых имеет место несимметричная информированность участников торговли. Такие ранки получили название рынков с асимметричной информацией[44].

[44] Как видно из примера, приведенного в предыдущем разделе, "симметричная неинформированность" в условиях неопределенности тоже может привести к неоптимальности, если не все участники нейтральны к риску.

8.1 Неблагоприятный отбор и моральный риск

Есть рынки (например, рынок подержанных автомобилей) на которых качество конкретного экземпляра товара покупатель может определить с трудом, зато оно неплохо известно продавцу. Рыночная цена едина и не зависит от качества. Чем больше доля некачественных товаров, тем ниже цена, а чем ниже цена, тем менее выгодно продавать качественные товары. Такой процесс может закончиться полным вытеснением качественных товаров с рынка. Разрушение рынка при несимметричной информированности называют неблагоприятным отбором. Следующий пример иллюстрирует это явление.

Пример 8.1 *(Модель Акерлова) Пусть, для простоты, качество бывает всего двух градаций: хорошее ("груша") или плохое ("лимон"[45]), есть один тип покупателей и один тип продавцов. Каждый продавец знает, "лимон" или "грушу" он продает, полезность в деньгах сохранения лимона у себя равна l, а груши — $g > l$.*

Полезность лимона для типичного покупателя равна $l' \geq l$, а груши — $g' > g$, причем покупатель узнает только в процессе использования, лимон или грушу он купил. Он знает только вероятность μ попадания лимона среди всех продаж, соответственно вероятность попадания груши есть $1 - \mu$. Соответственно, если покупатель нейтрален к риску, то цена p, которую он заплатил бы за покупку не превышает $p \leq p' = (1 - \mu)g' + \mu l'$. Если окажется, что эта цена не ниже резервной цены груши g, то можно ожидать, что в равновесии происходит торговля и лимонами и грушами.

Если же $p' < g$, то никто из продавцов не вынесет на продажу груши, оставив их у себя, хотя их потенциальная полезность у покупателя выше, что приводит к неоптимальности. Действительная вероятность $\mu' \neq \mu$ появления лимонов среди продаж станет выше. Когда покупатели узнают об этом по опыту, резервная цена покупателей еще более понизится. Такой рынок разрушается. Заметьте: если продавцы тоже не знают, лимон или грушу они продают, и являются, как и покупатели, нейтральными к риску, то торговля сохранится, и равновесие будет Парето-оптимальным, так что добавление информации (несимметричное) ухудшает положение!

На рынке, описываемом некоторым вариантом модели Акерлова ситуация меняется, если возможно посредничество. Пусть есть эксперты по грушами и лимонами, которые могут, затратив c денежных единиц, отличить их. Посредники либо торгуют сами, либо дают платные советы. Если посредники дорожат "маркой фирмы" (репутацией), то оценивают товар достоверно. Перед потребителем выбор: покупать "кота в мешке" самому или заплатить за совет специалиста (либо покупать товары у посредников).

Еще одним возможное решением проблемы асимметричности информации является гарантия. В момент совершения сделки покупатель не может определить качество товара, но это качество выявляется в процессе использования. Продавцу хорошего товара выгодно взять на себя обязательство замены или ремонта некачественного товара. Наличие гарантии служит сигналом для покупателя, что этот товар хороший.

Сигнализированием называют действия владельцев лучшего товара, направленные на информирование покупателей о качестве товара. Сигнал должен быть такой, чтобы владельцам "лимонов" было бы трудно произвести его.

Пример 8.2 *(Сигналы на рынке труда) Пусть есть только две категории работников: "способные" (H) и "неспособные" (L). Первые для нанимателя характеризуются*

[45]В английском языке в одном из значений слово limon — "некачественный товар".

производительностью a^H а вторые — $a^L < a^H$ дохода на единицу зарплаты. Предполагается, что выяснение качества работника занимает много времени и увольнение затруднено, поэтому модель Акерлова остается в силе. Работники могут просигнализировать о своем качестве, проучившись $x_i \geq 0$ лет, причем для "способного" это легче и составит $c_H x_H > 0$ затрат, а для "неспособного" — $c_L x_L,\ c_L > c_H$.

Задача нанимателя — установить некоторое пороговое значение в x^* лет учебы, которое разделяло бы тех, кому после найма следует платить низкую зарплату (w^L), и тех, кому платить высокую (w^H). В результате при некоторых параметрах "способные" станут учиться x^* лет, а "неспособные" — 0 лет, то есть учеба как способ сигнализирования оправдает себя. Равновесие не будет Парето -оптимальным: поскольку в модели игнорирована реальная польза от учебы, то учеба носит чисто рекламный характер, поэтому $c^H \hat{x}_H > 0$ — чистые потери.

В модели Акерлова перед владельцем товара стоит только выбор продавать или не продавать товар. Ситуация усложняется, если продавец сам является производителем товара и может повлиять на его качество. Здесь появляется другой эффект — моральный риск (moral hazard) . Его можно показать на примере гарантий. Фирме, дающей гарантию, трудно отличить, вызвано ли повреждение товара его плохим качеством при покупке или действиями покупателя. Покупатель поэтому, имея гарантию, может обращаться с товаром менее аккуратно.

Другой пример морального риска — страхование. Часто трудно определить, вызван ли страховой случай случайностью или небрежностью и даже намеренными действиями страхуемого. Например, если дом застрахован от пожара на сумму большую его стоимости, то существует опасность, что владелец дома сам его подожжет с целью получения страховки.

8.2 Задача выбора оптимального контракта

Пусть хозяин некоторого производства (principal) хочет найти оптимальную схему стимулирования своего работника (agent)[46]. Предполагаем, что выпуск или доход предприятия $y = y(x, \xi)$ есть возрастающая функция от усилий работника $x \in X$, выбираемых из его допустимого множества X, и от случайного фактора $\xi \in \Xi$. Задача хозяина — максимизировать математическое ожидание своей выгоды на множестве возможных контрактов. Контракт $R(.)$ — это плата, получаемая работником, как функция от некоторого набора наблюдаемых хозяином переменных. Такими переменными могут быть y, x, ξ или s, где s — прочие наблюдаемые начальником сигналы, т. е. случайные переменные, распределение которых зависит статистически от x и/или ξ. В наихудшей для начальника ситуации можно делать контракт зависимым только от выпуска y, поскольку ни действия x, ни случайный фактор не наблюдаются начальником: $R = R(y)$. В общей постановке известно также распределение фактора ξ.

Поведение работника описывается элементарной функцией полезности $u(x, R)$, убывающей по величине усилий x, и возрастающей по вознаграждению R. При этом, если математическое ожидание полезности ниже некоторой "резервной" полезности u_0, то работник откажется от контракта и уйдет (или умрет, если рассматривается раб).

[46]Английское название этого сюжета — "principal-agent problem"

Определение 8.2.1 *Оптимальным для начальника на некотором множестве возможных схем оплаты $\mathcal{R}$ назовем такой контракт $R(y,x,\xi,s) \in \mathcal{R}$, который дает ему наибольшую ожидаемую прибыль*

$$E(\pi) = E(y(\hat{x},\xi) - R(y(\hat{x},\xi),\hat{x},\xi,s)) \tag{100}$$

и удовлетворяет совместно с оптимальным усилием $\hat{x}$ двум условиям:

1) Ожидаемая полезность работника не ниже той, при которой он ушел бы с работы:

$$E(u(\hat{x}, R(y(\hat{x},\xi),\hat{x},\xi,s))) \geq u_0, \tag{101}$$

2) Уровень усилий $\hat{x}$ является оптимальным с точки зрения работника при данной схеме оплаты $R(.)$:

$$E(u(\hat{x}, R(y(\hat{x},\xi),\hat{x},\xi,s))) \geq E(u(x, R(y(x,\xi),x,\xi,s))) \quad (\forall x \in X). \tag{102}$$

Перечислим некоторые возможные виды схем оплаты.

1) Контракт типа "бери или уходи" (take it or leave it) — это контракт, задающий фиксированную оплату r при достижении работником уровня усилий $\hat{x}$ и ноль в противном случае.

2) Оплата, пропорциональная уровню усилий: $R = a + bx$.

3) Контракт с полной ответственностью работника за результат, — то есть рентный контракт типа $R = y - b$, где b — фиксированная сумма, уплачиваемая работником за аренду предприятия, — является оптимальным при подходящем выборе константы b. При таком контракте работник становится получателем всего остаточного дохода, но одновременно, берет на себя весь риск.

4) Контракт типа издольщины $R = \delta y$, где $\delta < 1$ — фиксированная доля продукции.

В простейшем частном случае, когда $y(.)$ не зависит ни от какого случайного фактора, для трех первых схем оплаты верно следующее: если контракт оптимален с точки зрения начальника, то он Парето-оптимален. Издольщина никогда не оптимальна по Парето (при дифференцируемости функций и несущественности краевых условий $x \in X$).

При существенности же случайного фактора выбор контракта (схемы вознаграждения) не столь тривиален. Если усилия работника наблюдаемы, то первые два типа оплаты могут быть оптимальными. Используя эти схемы хозяин может побудить работника осуществлять любой необходимый уровень усилий, заботясь только, чтобы работник от него не ушел. Рассмотрим, например, работника с линейной по доходу элементарной функцией полезности $u(x,R) = R - \Phi(x)$. В этом случае мы можем записать задачу нахождения оптимального уровня усилий в виде

$E(\pi) = E(y(x,\xi)) - \Phi(x) - u_0 \to \max_{x \in X}$.

Здесь мы просто подставили в целевую функцию хозяина плату работника R, которая должна удовлетворять условию $E(u) = R - \Phi(x) = u_0$. Зная оптимальный уровень усилий, хозяин может подобрать соответствующую оптимальную схему оплаты. Полезность работника не зависит в данном случае от случайного фактора. Весь риск берет на себя нейтральный к риску хозяин.

Если усилия работника ненаблюдаемы, то нет уверенности, что работник не станет отлынивать от работы (англ. shirking). Это пример рассмотренного выше морального риска. Хозяин может применить контракт с полной ответственностью или издольщину. Контракт с полной ответственностью может быть Парето-оптимальным при нейтральности работника к риску, но это неверно, если работник характеризуется неприятием риска. Дело в том, что начальник вынужден брать на себя функцию подстраховки работника от нулевого или слишком малого потребления. Этим, в частности, объясняется и то, почему государство (principal) не может собирать налоги в форме подушного налога (аналог рентного контракта). При ненаблюдаемости усилий среди оптимальных контрактов могут быть и долевые.

Литература:

(Сокращение) и полное название учебника:vspace2mm

(ТИ) Э.Мулен, Теория игр (с примерами из математической экономики).- М.:Мир, 1985.

(М) Э.Маленво, Лекции по микроэкономическому анализу.- М.:Наука, 1985.

(ПР) Р.Пиндайк, Д.Рубинфельд, Микроэкономика.- М.:Экономика,Дело, 1992.

(Д) Э.Дж.Долан, Д.Е.Линдсей, Микроэкономика.- СПб., 1994.

(Х) Д.Н.Хайман, Современная микроэкономика: анализ и применение.- М.: Финансы и статистика, 1992.

Соответствие разделов пособия учебникам: vspace2mm

Теория игр ТИ.1,2,3; М.6.1

Парето-оптимум и общее равновесие М.4; ПР.15; Х.16

Фиаско рынка ПР.15.6; Д.4.2

Экстерналии М.9.2; ПР.17.1,2; Д.17; Х.17

Общественные блага М.9.3,4; ПР.17.3; Х.18

Монополии и олигополии М.3.9, 4.3,8, 7.6,7; ПР.10,11,12; Д.8,9; Х.10,11

Налоги ПР.пример4.1; Д.3.2, 5.3; Х.4.6, 5.6, 5.дополнение, 10.6

Риск М.11; ПР.5; Д.13; Х.5.дополнение

Несимметричная информация М.12; ПР.16; Д.13

+ Базовая микроэкономика:

> Потребитель	М.2; ПР.3; Д.5; Х.3
> Эффекты замены и дохода	М.2.7; ПР.4.2; Д.5.2; Х.4.4
> Производство и фирмы	М.3; ПР.6,7,8; Д.6,7; Х.6,7,8
> Рынок одного товара	ПР.2, 4.3
> Излишек и эффективность	ПР.4.4, .9; Д.5.3; Х.5.6, 5.дополнение, 8.5, 12.1

Предметный указатель