

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСТИМЫХ РЕЖИМОВ
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
АЛГОРИТМАМИ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК*)

О. Н. Войтов, В. И. Зоркальцев, А. Ю. Филатов

Для решения задачи определения допустимых режимов электроэнергетических систем предлагается использовать ряд новых эффективных вариантов алгоритмов внутренних точек. Построен критерий, позволяющий быстро, обычно на первой итерации, идентифицировать случай несовместности ограничений задачи. Приведены результаты тестовых экспериментов.

Введение. Для эффективного управления электроэнергетическими системами (ЭЭС) важно уметь оперативно рассчитывать допустимые и оптимальные режимы их функционирования в изменяющихся ситуациях. Исходные модели ЭЭС, подробно описанные в [1, 2], являются нелинейными, и в общем случае задача поиска допустимого режима сводится к нахождению точки, удовлетворяющей ограничениям-равенствам (здесь главную роль играют уравнения баланса узловых мощностей) и ограничениям-неравенствам (сюда, в первую очередь, относятся ограничения на перетоки активной и реактивной мощности) следующего вида:

$$W(x, y) = 0, \quad \bar{x} \geq x \geq \underline{x}, \quad \bar{y} \geq y \geq \underline{y}. \quad (1)$$

Здесь \bar{x} , \underline{x} и \bar{y} , \underline{y} — заданные векторы размерности n и m соответственно, причем $\bar{x}_j > \underline{x}_j$, $j = 1, \dots, n$, $\bar{y}_i > \underline{y}_i$, $i = 1, \dots, m$, $W(x, y)$ — m -мерная нелинейная вектор-функция.

Поиск допустимой точки осуществляется на основе метода приведенного градиента [3]. При применении итеративной линеаризации задача сводится к следующей.

Пусть заданы матрица A размерности $m \times n$ и векторы \bar{x} , $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, \bar{y} , $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим систему линейных уравнений и неравенств относительно векторов $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$:

$$Ax - y = 0, \quad \bar{x} \geq x \geq \underline{x}, \quad \bar{y} \geq y \geq \underline{y}. \quad (2)$$

Необходимо найти допустимое решение системы (2) либо доказать, что она несовместна.

Главным результатом проведенного исследования явилось решение проблемы быстрой идентификации случая несовместности ограничений — проблемы, не нашедшей эффективного решения в алгоритмах, использующихся на практике. Кроме того, в статье приведен ряд новых алгоритмов внутренних точек (прямой алгоритм В, двойственные С и D, а также прямо-двойственный Е), относящихся к аффинно-масштабирующим методам. Они, как показало экспериментальное исследование, проведенное как на совместных, так и на несовместных задачах, сопоставимы, а иногда даже более предпочтительны по скоростным характеристикам, чем применяющийся сейчас исходный вариант метода внутренних точек [4], в статье обозначенный как алгоритм А.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-01-00530).

1. Прямые алгоритмы. Пусть некоторым образом получена стартовая точка (x^1, y^1) , удовлетворяющая в строгой форме ограничениям-неравенствам

$$\bar{x}_j > x_j^1 > \underline{x}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad \bar{y}_i > y_i^1 > \underline{y}_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Например, стартовую точку можно сформировать автоматически:

$$x^1 = 0,5(\bar{x} + \underline{x}), \quad y^1 = 0,5(\bar{y} + \underline{y}). \quad (4)$$

Из предыдущих расчетов и других соображений можно иметь и некую пару (x, y) , которая подозревается в качестве хорошего приближения к решению системы (2). Причем по некоторым компонентам векторов x и y могут не выполняться в строгой форме ограничения-неравенства. Однако за счет небольших по возможности корректировок таких компонент можно достичь выполнения неравенств (3). Таким образом, можно получить стартовую точку, лучшую чем дает автоматическое правило.

Распишем подробно итеративный процесс улучшения решения. На k -итерации ($k = 1, 2, \dots$) выполняются следующие действия.

ШАГ 1. Вычисляется вектор невязок

$$r^k = y^k - Ax^k.$$

ШАГ 2. Определяются положительные весовые коэффициенты — элементы диагональных матриц X_k и Y_k размерности $n \times n$ и $m \times m$. Правила задания коэффициентов будут даны ниже при конкретизации двух вариантов алгоритмов.

ШАГ 3. Находятся векторы направлений корректировки Δx^k , Δy^k как решение вспомогательной задачи

$$(\Delta x)^T X_k^{-1} \Delta x + (\Delta y)^T Y_k^{-1} \Delta y \rightarrow \min_{\Delta x \in \mathbb{R}^n, \Delta y \in \mathbb{R}^m}, \quad (5)$$

$$A \Delta x - \Delta y = r^k. \quad (6)$$

ШАГ 4. Находится шаг корректировки λ_k — максимально возможный шаг, при котором мы остаемся внутри допустимого интервала по всем переменным, т. е. такой, при котором выполняются неравенства

$$\bar{x} \geq x^k + \lambda_k \Delta x^k \geq \underline{x}, \quad \bar{y} \geq y^k + \lambda_k \Delta y^k \geq \underline{y}.$$

Для этого вычисляются вспомогательные величины $\lambda_k^1, \lambda_k^2, \lambda_k^3, \lambda_k^4$:

$$\lambda_k^1 = \min_{j: \Delta x_j^k < 0} \frac{\underline{x}_j - x_j^k}{\Delta x_j^k}, \quad \lambda_k^2 = \min_{j: \Delta x_j^k > 0} \frac{\bar{x}_j - x_j^k}{\Delta x_j^k},$$

$$\lambda_k^3 = \min_{j: \Delta y_j^k < 0} \frac{\underline{y}_j - y_j^k}{\Delta y_j^k}, \quad \lambda_k^4 = \min_{j: \Delta y_j^k > 0} \frac{\bar{y}_j - y_j^k}{\Delta y_j^k}.$$

Если множество индексов, по которому берется минимум, в определениях какого-либо λ_k^l , $l = 1, \dots, 4$ пусто, то данное λ_k^l примем равным ∞ . Одно из этих множеств индексов обязательно будет непусто. Максимально возможный шаг вычисляется по правилу

$$\lambda_k = \min \{ \lambda_k^1, \lambda_k^2, \lambda_k^3, \lambda_k^4 \}.$$

ШАГ 5. Осуществляется итеративный переход. Если $\lambda_k \geq 1$, то вычислительный процесс прекращается в связи с нахождением допустимого решения системы (2):

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k, \quad y^{k+1} = y^k + \Delta y^k.$$

В противном случае производится пересчет переменных по формулам

$$x^{k+1} = x^k + \gamma \lambda_k \Delta x^k, \quad y^{k+1} = y^k + \gamma \lambda_k \Delta y^k, \quad \gamma = 2/3.$$

Для прямых алгоритмов на каждой итерации справедливо выполнение в строгой форме ограничений-неравенств, невязки ограничений-равенств монотонно уменьшаются по правилу $r^{k+1} = (1 - \gamma \lambda_k) r^k$. Благодаря этой формуле, легко понять, почему при итеративном переходе нет смысла двигаться с шагом, большим единицы.

2. Два способа решения вспомогательной задачи. Если для задачи (5), (6) применим метод множителей Лагранжа, то получим следующую расчетную схему. Сначала вычисляем вектор множителей u^k ограничений (6) как решение системы уравнений относительно вектора $u \in \mathbb{R}^n$:

$$(AX_k A^T + Y_k)u = r^k.$$

Затем вычисляем

$$\Delta x^k = X_k A^T u^k, \quad \Delta y^k = -Y_k u^k.$$

При использовании этого пути расчетов основной вычислительной проблемой является решение системы линейных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей размерности $m \times m$.

Другой путь организации вычислений состоит в выражении Δy через Δx из условия (6). Приходим к задаче безусловной минимизации

$$\Delta x^T X_k^{-1} \Delta x + (A \Delta x - r^k)^T Y_k^{-1} (A \Delta x - r^k) \rightarrow \min_{\Delta x \in \mathbb{R}^n}.$$

Приравняв градиент минимизируемой функции нулевому вектору, получим систему линейных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей $n \times n$:

$$(X_k^{-1} + A^T Y_k^{-1} A) \Delta x = A^T Y_k^{-1} r^k.$$

Найдя из нее вектор Δx^k , можем определить Δy^k и u^k по правилам

$$\Delta y^k = A \Delta x^k - r^k, \quad u^k = -Y_k^{-1} \Delta y^k.$$

В случае, если $n < m$, то вычисления по второму из указанных вариантов могут позволить сократить время расчетов.

Конкретизируем два анонсированных варианта алгоритмов. Они отличаются только правилами задания весовых коэффициентов в на шаге 2 описанной выше схемы расчетов. Положим

$$\hat{x}_j^k = \min \{ \bar{x}_j - x_j^k, x_j^k - \underline{x}_j \}, \quad j = 1, \dots, n, \\ \hat{y}_i^k = \min \{ \bar{y}_i - y_i^k, y_i^k - \underline{y}_i \}, \quad i = 1, \dots, m.$$

АЛГОРИТМ А. В этом варианте весовые коэффициенты вычисляются по правилу

$$(X_k)_{jj} = (\hat{x}_j^k)^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad (Y_k)_{ii} = (\hat{y}_i^k)^2, \quad i = 1, \dots, m.$$

АЛГОРИТМ В. Здесь при $k > 1$ весовые коэффициенты вычисляются по правилу

$$(X_k)_{jj} = \hat{x}_j^k / \max \{ \varepsilon, |v_j^{k-1}| \}, \quad j = 1, \dots, n, \\ (Y_k)_{ii} = \hat{y}_i^k / \max \{ \varepsilon, |u_i^{k-1}| \}, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $v^{k-1} = A^T u^{k-1}$, а u^{k-1} — вектор множителей Лагранжа ограничений вспомогательной задачи, полученный на предыдущей итерации, $\varepsilon > 0$ — заданная малая величина, в частности, в реализованном варианте было принято $\varepsilon = 10^{-10}$. При $k = 1$ весовые коэффициенты могут вычисляться, например, по правилу из алгоритма А.

Реальные расчеты с начала 80-х годов ведутся на основе алгоритма А. В частности, именно он реализован в разработанном в ИСЭМ СО РАН программно-вычислительном комплексе СДО (Стационарные, Допустимые, Оптимальные). Новый алгоритм В более устойчив к погрешностям вычислений, что особенно актуально на заключительном этапе вычислительного процесса. Поскольку переход от алгоритма А к В тривиален, выполнив несколько итераций в соответствии с алгоритмом А (как показали эксперименты, на первых итерациях он чаще сходится быстрее), можно сменить правила вычисления весовых коэффициентов на новые, используя преимущества алгоритма В.

3. Идентификация случая несовместности. Существенной проблемой для обоих алгоритмов ранее являлась невозможность быстрой идентификации случая несовместности системы (2). Для его выявления требовался, как правило, большой объем вычислений, сопоставимый с объемом, необходимым для получения допустимой точки в случае совместности ограничений. Результатом же проведенного исследования явилась техника, основанная на приводимом ниже критерии (варианте теоремы Фаркаша), с помощью которой проблема практически снимается, так как несовместность идентифицируется на самых первых итерациях.

Теорема. Система уравнений и неравенств (2) несовместна в том и только в том случае, когда существует вектор $u \in \mathbb{R}^m$, при котором

$$\psi(u) < 0,$$

где

$$\psi(u) = -\bar{y}^T u_- - \underline{y}^T u_+ + \bar{x}^T (A^T u)_+ + \underline{x}^T (A^T u)_-. \quad (7)$$

Здесь $a_+ = \max\{0, a\}$, $a_- = \min\{0, a\}$ — срезки вещественного числа a .

Предлагаемая техника заключается в следующем дополнении в схему вычислительного процесса. Подсчитанный в п. 3 алгоритмов А и В вектор множителей Лагранжа u^k ограничений (6) подставляется в определенную в (7) функцию ψ . Если

$$\psi(u^k) < 0, \quad (8)$$

то согласно приведенной теореме система (2) несовместна, и расчеты по алгоритму могут быть завершены. В [5] показано, что если система (2) несовместна, то на одной из итераций обязательно будет иметь место неравенство (8). Одной из основных целей проведенного экспериментального исследования была проверка работоспособности предложенного критерия на практических задачах.

4. Двойственные алгоритмы. Альтернативным подходом к решению системы уравнений и неравенств (2) является использование двойственных алгоритмов внутренних точек, введенных в [6] для стандартной задачи линейного программирования. В этих алгоритмах осуществляется монотонное от итерации к итерации улучшение решений двойственной задачи линейного программирования внутри области ее допустимых решений. При этом в результате решения вспомогательной задачи на каждой итерации вырабатываются векторы, служащие приближением к решению исходной задачи.

Задача, двойственная к исходной системе уравнений и неравенств (2), имеет следующий вид:

$$\bar{y}^T w^1 - \underline{y}^T w^2 + \bar{x}^T v^1 - \underline{x}^T v^2 \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$A^T(w^1 - w^2) + v^1 - v^2 = 0, \quad w^1 \geq 0, \quad w^2 \geq 0, \quad v^1 \geq 0, \quad v^2 \geq 0. \quad (10)$$

Здесь переменные v^1 и v^2 можно интерпретировать как двойственные оценки ограничений $\bar{x} \geq x$ и $x \geq \underline{x}$, а переменные w^1 и w^2 — соответственно как двойственные оценки ограничений $\bar{y} \geq y$ и $y \geq \underline{y}$.

Предполагается заданным исходное приближение $w^{1,1}, w^{2,1}, v^{1,1}, v^{2,1}$, удовлетворяющее условиям (9), (10). Причем неравенства (10) выполняются в строгой форме. Таким приближением может служить любая точка $v^{1,1} = v^{2,1}, w^{1,1} = w^{2,1}$. В частности, в первоначальной редакции алгоритма, предложенной в [5], было задано

$$\begin{aligned} v_j^{1,1} &= v_j^{2,1} = 1, & j &= 1, \dots, n; \\ w_i^{1,1} &= w_i^{2,1} = 1, & i &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Такое начальное приближение универсально, однако оно ни в коей мере не учитывает специфику задачи. Поскольку переменные v^1 и v^2 , являясь двойственными оценками, в некотором смысле обратно пропорциональны разностям $\bar{x} - x$ и $x - \underline{x}$ соответственно (аналогичная ситуация с w^1 и w^2), то целесообразнее проводить инициализацию алгоритма, пользуясь следующими правилами:

$$\begin{aligned} v_j^{1,1} &= v_j^{2,1} = 2/(\bar{x}_j - \underline{x}_j), & j &= 1, \dots, n; \\ w_i^{1,1} &= w_i^{2,1} = 2/(\bar{y}_i - \underline{y}_i), & i &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Вычислительный процесс на итерации $k = 1, 2, \dots$ состоит из следующих операций.

ШАГ 1. Определяются диагональные матрицы весовых коэффициентов W_k^1, W_k^2 и V_k^1, V_k^2 размерностей $m \times m$ и $n \times n$. Правилами задания весовых коэффициентов (они будут приведены ниже) и различаются варианты алгоритмов.

ШАГ 2. Находится решение x^k, y^k вспомогательной задачи

$$\begin{aligned} &(\bar{x} - x)^T V_k^1 (\bar{x} - x) + (x - \underline{x})^T V_k^2 (x - \underline{x}) \\ &+ (\bar{y} - y)^T W_k^1 (\bar{y} - y) + (y - \underline{y})^T W_k^2 (y - \underline{y}) \rightarrow \min_{y \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$Ax - y = 0.$$

Снова можно действовать двояко, в зависимости от соотношения размерностей m и n . Поскольку обычно выполняется неравенство $m < n$, то основной метод решения вспомогательной задачи — это метод множителей Лагранжа.

Для начала рассчитаем вспомогательные диагональные матрицы

$$V_k^3 = (V_k^1 + V_k^2)^{-1}, \quad W_k^3 = (W_k^1 + W_k^2)^{-1}.$$

Затем найдем вектор множителей Лагранжа u^k ограничений (11) как решение следующей задачи:

$$(AV_k^3 A^T + W_k^3)u = W_k^3(W_k^1 \bar{y} + W_k^2 \underline{y}) - AV_k^3(V_k^1 \bar{x} + V_k^2 \underline{x}).$$

И в заключение вычислим искомые векторы

$$x^k = V_k^3(V_k^1 \bar{x} + V_k^2 \underline{x} + A^T u^k), \quad y^k = Ax^k = W_k^3(W_k^1 \bar{y} + W_k^2 \underline{y} - u^k).$$

Если полученная точка принадлежит интервалам

$$\bar{x} \geq x^k \geq \underline{x}, \quad \bar{y} \geq y^k \geq \underline{y},$$

то вычисления заканчиваются, поскольку ограничения-равенства выполняются всегда; мы получили допустимое решение системы (2). Если же хотя бы одна переменная выходит за границы, итерационный процесс продолжается.

ШАГ 3. В соответствии с предложенным критерием осуществляется проверка несовместности. Подставим вектор множителей Лагранжа в функцию, определенную в (7). Если $\psi(u^k) < 0$, то система (2) несовместна, вычисления прекращаются.

ШАГ 4. Вычисляются векторы направлений корректировки:

$$\begin{aligned}\Delta v^{1,k} &= -V_k^1(\bar{x} - x^k), & \Delta v^{2,k} &= -V_k^2(x^k - \underline{x}), \\ \Delta w^{1,k} &= -W_k^1(\bar{y} - y^k), & \Delta w^{2,k} &= -W_k^2(y^k - \underline{y}).\end{aligned}$$

ШАГ 5. Вычисляется шаг корректировки — максимальный шаг, при движении с которым переменные u^1 , u^2 , w^1 и w^2 остаются в положительной области:

$$\lambda_k = \min \{ \lambda_k^1, \lambda_k^2, \lambda_k^3, \lambda_k^4 \},$$

где

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_k^1} &= \left(\max_j \frac{-\Delta v_j^{1,k}}{v_j^{1,k}} \right)_+, & \frac{1}{\lambda_k^2} &= \left(\max_j \frac{-\Delta v_j^{2,k}}{v_j^{2,k}} \right)_+, \\ \frac{1}{\lambda_k^3} &= \left(\max_i \frac{-\Delta w_i^{1,k}}{w_i^{1,k}} \right)_+, & \frac{1}{\lambda_k^4} &= \left(\max_i \frac{-\Delta w_i^{2,k}}{w_i^{2,k}} \right)_+.\end{aligned}$$

ШАГ 6. Производится итеративный переход по формулам

$$\begin{aligned}w^{1,k+1} &= w^{1,k} + \gamma \lambda_k \Delta w^{1,k}, & w^{2,k+1} &= w^{2,k} + \gamma \lambda_k \Delta w^{2,k}, \\ v^{1,k+1} &= v^{1,k} + \gamma \lambda_k \Delta v^{1,k}, & v^{2,k+1} &= v^{2,k} + \gamma \lambda_k \Delta v^{2,k}.\end{aligned}$$

ШАГ 7. Вновь осуществляется проверка. Если $\psi(w_k^2 - w_k^1) < 0$, то вычислительный процесс прекращается в связи с обнаружением несовместности системы (2).

Приведем правила вычисления матриц весовых коэффициентов.

АЛГОРИТМ С. Весовые коэффициенты задаются формулами

$$\begin{aligned}(V_k^1)_{jj} &= (v_j^{1,k})^2, \quad j = 1, \dots, n; & (V_k^2)_{jj} &= (v_j^{2,k})^2, \quad j = 1, \dots, n, \\ (W_k^1)_{ii} &= (w_i^{1,k})^2, \quad i = 1, \dots, m, & (W_k^2)_{ii} &= (w_i^{2,k})^2, \quad i = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

АЛГОРИТМ D. Весовые коэффициенты задаются формулами

$$\begin{aligned}(V_k^1)_{jj} &= v_j^{1,k} / \max \{ \varepsilon, \bar{x}_j - x_j^{k-1} \}, & j &= 1, \dots, n, \\ (V_k^2)_{jj} &= v_j^{2,k} / \max \{ \varepsilon, x_j^{k-1} - \underline{x}_j \}, & j &= 1, \dots, n, \\ (W_k^1)_{ii} &= w_i^{1,k} / \max \{ \varepsilon, \bar{y}_i - y_i^{k-1} \}, & i &= 1, \dots, m, \\ (W_k^2)_{ii} &= w_i^{2,k} / \max \{ \varepsilon, y_i^{k-1} - \underline{y}_i \}, & i &= 1, \dots, m,\end{aligned}$$

для некоторого малого $\varepsilon > 0$, проблему выбора которого затронем чуть позже. При $k = 1$ можно положить (x^0, y^0) равным исходному приближению в прямых алгоритмах, т. е. использовать векторы, удовлетворяющие условию (3), например полученные по формуле (4).

Проблема выбора оптимального значения ε для рассматриваемого алгоритма оказывается очень важной. В его первоначальной версии [5] величина ε использовалось, как и в алгоритме В, лишь для защиты от деления на нуль и принималось равным 10^{-10} . Однако на отдельных задачах такая схема показала себя не лучшим образом. Рассмотрим причины этого.

В алгоритме D, в отличие от алгоритма В, всегда (пока не найдено решение) часть переменных выходит за пределы допустимого интервала. Всем им по данной схеме соответствуют огромные величины весовых коэффициентов. Подобные «штрафы» должны, по идее алгоритма, стимулировать возвращение переменных, вышедших из допустимой области, внутрь интервала. Однако, жестко «вгоняя» одни переменные внутрь интервала, другие переменные (которым соответствуют очень небольшие, в сравнении, весовые коэффициенты) начинают выходить вовне.

Существует несколько способов решения данной проблемы. Можно задавать значение ε , руководствуясь спецификой задачи. Мало того, это значение может изменяться от итерации к итерации. Главный принцип здесь должен состоять в том, чтобы переменным, вышедшим за границы интервала, соответствовали значения весовых коэффициентов, превосходящие весовые коэффициенты переменных, находящихся внутри. В частности, в новом варианте алгоритма вычисление значения ε ведется по следующему правилу:

$$\varepsilon = k \min \left\{ \min_{j: x_j^{k-1} < \bar{x} - \underline{\varepsilon}} (\bar{x}_j - x_j^{k-1}), \min_{j: x_j^{k-1} > \underline{x} + \underline{\varepsilon}} (x_j^{k-1} - \underline{x}_j), \right. \\ \left. \min_{i: y_i^{k-1} < \bar{y} - \underline{\varepsilon}} (\bar{y}_i - y_i^{k-1}), \min_{i: y_i^{k-1} > \underline{y} + \underline{\varepsilon}} (y_i^{k-1} - \underline{y}_i) \right\},$$

где $\underline{\varepsilon} = 10^{-10}$, $k = 0, 2$.

В прямых алгоритмах А и В приближения (x^k, y^k) на каждой итерации удовлетворяют интервальным ограничениям, но не удовлетворяют ограничениям-равенствам, а в двойственных С и D удовлетворяют ограничениям-равенствам, но могут выходить за границы допустимых интервалов. В рассматриваемом же ниже прямо-двойственном алгоритме мы движемся к решению с двух сторон.

Алгоритм Е. Обозначим через \tilde{x}^1, \tilde{y}^1 начальное приближение, удовлетворяющее неравенствам (3).

Далее действуем в соответствии с правилами алгоритма D с тем отличием, что в формулах вычисления весовых коэффициентов используем вместо векторов x^{k-1}, y^{k-1} векторы \tilde{x}^k, \tilde{y}^k , которые итеративно пересчитываются по формулам

$$\tilde{x}^{k+1} = \tilde{x}^k + \gamma \tilde{\lambda}_k \Delta x^k, \quad \tilde{y}^{k+1} = \tilde{y}^k + \gamma \tilde{\lambda}_k \Delta y^k,$$

где

$$\Delta x^k = x^k - \tilde{x}^k, \quad \Delta y^k = y^k - \tilde{y}^k, \quad \gamma = 2/3.$$

Шаг λ_k определяется как максимальное значение, при котором выполняются неравенства

$$\bar{x} \geq \tilde{x}^k + \tilde{\lambda}_k \Delta x^k \geq \underline{x}, \quad \bar{y} \geq \tilde{y}^k + \tilde{\lambda}_k \Delta y^k \geq \underline{y}.$$

Поскольку данный переход осуществляется только тогда, когда точка (x^k, y^k) является недопустимой, то $\lambda_k \in (0, 1)$. По итерациям происходит монотонное сокращение вектора невязок

$$\tilde{r}^{k+1} = (1 - \lambda_k) \tilde{r}^k,$$

где

$$\tilde{r}^k = \tilde{y}^k - A \tilde{x}^k.$$

5. Экспериментальное исследование. Все предложенные алгоритмы были протестированы на 14 совместных и 14 несовместных задачах размерности от 30×80 до 41×80 , полученных из моделей электроэнергетических систем, а также на следующем тестовом примере (брались значения $n = 19$ и $n = 201$):

$$\begin{aligned}x_i &\in [0, n], \quad i = 1, \dots, n, \\y_i &= x_{i+1} - x_i \in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, n - 1, \\y_n &= -x_1 + x_{(n+2)/2} - x_n \in [(n-1)/2 - \varepsilon, n], \quad \varepsilon = 0,0001.\end{aligned}$$

Допустимыми для него будут, например, векторы x , заданные по правилам

$$x_i = i - 1, \quad i = 1, \dots, (n+1)/2, \quad x_i = n - i, \quad i = (n+3)/2, \dots, n.$$

Поскольку все алгоритмы имеют примерно одинаковый объем вычислений на итерации, то характеристикой объема вычислений можно считать число итерацией, за которое алгоритм находит допустимый режим либо выявляет, что предложенная задача несовместна. Чтобы не загромождать таблицу большим количеством цифр, занесем в нее суммарное количество итераций, необходимых каждому методу для решения всех 14 совместных и всех 14 несовместных задач. В скобках записано минимальное и максимальное число итераций, необходимых для решения отдельной задачи.

Число итераций, необходимое для решения задач разными методами

	Совместные задачи 30×80 – 41×80	Несовместные задачи 30×80 – 41×80	Тестовый пример 19×19	Тестовый пример 201×201
A	133 (3–13)	22 (1–5)	13	19
B	188 (7–17)	23 (1–7)	8	7
C	143 (6–13)	14 (все 1)	11	16
D	82 (3–8)	14 (все 1)	6	9
E	134 (4–13)	14 (все 1)	13	17

Таблица демонстрирует, что, во-первых, очень эффективно проявляет себя критерий несовместности — несовместность практически всегда идентифицируется на самой первой итерации. Особенно хорошо здесь зарекомендовали себя двойственные и прямо-двойственный алгоритмы. Кроме того, можно отметить, что новые алгоритмы работают не хуже, а подчас лучше, чем применяющийся на практике и на совместных задачах. В первую очередь это относится, конечно, к алгоритму D. Хотя поскольку наше внимание было уделено лишь работе алгоритмов внутри одной итерации линеаризации, окончательные выводы по поводу последнего утверждения можно будет сделать только после серьезного анализа их характеристик на исходных нелинейных задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Войтов О. Н. Решение задач определения допустимых и оптимальных режимов ЭЭС // Анализ и управление установившимися состояниями ЭЭС. Новосибирск: Наука, 1987. С. 55–122.
2. Войтов О. Н. Детерминированные методы и алгоритмы определения управлений при коррекции режимов ЭЭС // Методы решения задач реального времени в электроэнергетике. Новосибирск: Наука, 1990. С. 243–258.
3. Гамм А. З., Крумм Л. А., Мурашко Н. А., Тришечкин А. М. Применение метода приведенного градиента для расчета допустимого режима сложных ЭЭС // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1970. № 3. С. 21–33.
4. Дикин И. И., Зоркальцев В. И. Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек. Новосибирск: Наука, 1980.
5. Войтов О. Н., Зоркальцев В. И., Филатов А. Ю. Исследование систем неравенств алгоритмами внутренних точек на задачах поиска допустимых режимов электроэнергетических систем. Иркутск, 1997. 30 с. (Препринт / РАН. СЭИ СО РАН, № 10).
6. Зоркальцев В. И. Метод относительно внутренних точек. Сыктывкар: Коми филиал АН СССР, 1986.

г. Иркутск

*Статья поступила 30 августа 1998 г.
Окончательный вариант 17 января 2000 г.*