ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2001. Серия 2. Том 8, № 2, 17–26

УДК 519.852.6

АЛГОРИТМЫ СКОШЕННОГО ПУТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*)

О. Н. Войтов, В. И. Зоркальцев, А. Ю. Филатов

Для решения задачи линейного программирования предлагаются полиномиальные алгоритмы оптимизации в конусе скошенного пути. Скошенный путь — вводимое в статье расширение понятия пути аналитических центров. Рассматриваются перспективы использования предложенных алгоритмов для решения практической задачи определения допустимых режимов функционирования электроэнергетических систем.

Одной из наиболее сложных проблем алгоритмов оптимизации в конусе центрального пути, рассмотренных, в частности, в [1], является инициализация алгоритма. В связи с этим в данной статье предлагаются подходы, расширяющие понятие центрального пути и его конуса, которые в некоторых случаях могут упростить процедуру формирования стартовой точки и существенно повысить эффективность вычислительного процесса.

В данной статье неравенство $t > 0$ для вектора $t \in R^n$ будет означать положительность всех компонент этого вектора. Вектор, все компоненты которого равны единице, будем обозначать через e.

Рассмотрим взаимно-двойственные задачи линейного программирования

$$c^T x \to \min_{x \in X}, \quad X = \{x \in R^n \mid Ax = b, \ x \geqslant 0\}, \tag{1}$$

$$b^T u \to \max_{u \in U}, \quad U = \{u \in R^m \mid g(u) \equiv c - A^T u \geqslant 0\}, \tag{2}$$

где $c \in R^n$, $b \in R^m$, A — матрица размера $m \times n$, $\operatorname{rank} A = m$. Здесь X, U — множества допустимых решений задач (1) и (2).

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00530).

Далее будем считать, что задачи (1) и (2) имеют такие допустимые решения $x \in X$, $u \in U$, что все ограничения-неравенства выполняются в строгой форме, т. е.

$$x_j > 0, \quad g_j(u) > 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Определим множества точек, являющихся внутренними относительно множества допустимых решений задач (1), (2):

$$\mathrm{ri}X = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x > 0\},$$
$$\mathrm{ri}U = \{u \in R^m \mid g(u) \equiv c - A^T u > 0\}.$$

Из предположения (3) следует, что эти множества непустые и, как показано в [2], для любого заданного вектора $t > 0$ существует единственная пара $(x(t), u(t))$ такая, что выполняются условия

$$x(t) \in X, \quad u(t) \in U, \quad x_j(t) g_j(u(t)) = t_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Скошенный путь. *Скошенным путем,* инициируемым вектором $t > 0$, назовем множество всех пар векторов $(x(\mu t), u(\mu t))$ при $\mu > 0$. В частности, единичный вектор $t = e$ (как и вектор $t = \lambda e$ при любом положительном λ) инициирует путь аналитических центров [4]. Каждый скошенный путь характеризуется коэффициентом скошенности, который показывает отношение среднего значения компонент инициирующего вектора к его минимальной компоненте $\gamma = \bar{t}/t_{\min}$, где $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} t_j$, $\quad t_{\min} = \min\limits_{j=1,\dots,n} t_j$.

Так как для пути аналитических центров все компоненты инициирующего вектора равны между собой, то его коэффициент скошенности равен единице. Для всех остальных скошенных путей он больше единицы.

Точки каждого скошенного пути при $\mu \to 0$ сходятся к оптимальным решениям прямой и двойственной задач.

Конус скошенного пути. Далее считаем зафиксированным вектор $t > 0$. Рассмотрим расширение скошенного пути, инициированного этим вектором, которое назовем *конусом* скошенного пути. Он состоит из всех пар векторов (x, u) таких, что $x \in X$, $u \in U$, и существует такое $\mu > 0$, что

$$\Phi(x, u, \mu) \leqslant \theta \mu t_{\min}, \tag{5}$$

где

$$\Phi(x, u, \mu) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mu t_j} (\mu t_j - x_j g_j(u))^2. \tag{6}$$

Здесь $\theta > 0$ — радиус конуса скошенного пути.

Далее будем считать, что $\theta \in (0;1)$. В этом случае из неравенства (5) следует, что $x_j g_j(u) > 0$. Чтобы показать, что $x \in \mathrm{ri}X$ и $u \in \mathrm{ri}U$, необходимо проверить выполнение равенства $Ax = b$ и положительность компонент одного из векторов x или $g(u)$.

Суть предлагаемых алгоритмов состоит в том, что вырабатываются последовательности точек (x^k, u^k), принадлежащих конусу скошенного пути, и таких значений μ^k, что для x^k, u^k, μ^k справедливо условие (5). При этом для некоторого $\beta > 0$ выполняется неравенство $\mu^{k+1} \leqslant (1 - \beta/\sqrt{n})\mu^k$. Отсюда следует, как показано в [4], что для решения задач (1), (2) требуется $O(\sqrt{n}L)$ итераций, где L — вычислительная сложность задачи, которую при некоторых естественных условиях можно считать пропорциональной $\ln n$. Наиболее сложной вычислительной проблемой на каждой итерации является обращение симметричной положительно определенной квадратной матрицы порядка m. Если не использовать никаких специальных приемов, это требует $O(m^3)$ арифметических операций. Таким образом, для решения задач (1), (2) требуется выполнить $O(m^3\sqrt{n}\ln n)$ арифметических операций.

Прямой вариант алгоритма состоит в том, что мы закрепляем вектор x переменных прямой задачи, вводим параметрическую вектор-функцию

$$u^k(\lambda) = \arg\min_{u \in R^m} \Phi(x^k, u, \lambda\mu^k) \tag{7}$$

и находим λ^k как решение задачи

$$\lambda \to \min_{\lambda > 0}, \quad \Phi(x^k, u^k(\lambda), \lambda\mu^k) \leqslant \theta\lambda\mu^k t_{\min}. \tag{8}$$

После этого осуществляем итеративный переход

$$u^{k+1} = u^k(\lambda^k), \quad \mu^{k+1} = \lambda^k\mu^k, \quad x_j^{k+1} = 2x_j^k - \frac{1}{\mu^{k+1}t_j}(x_j^k)^2 g_j(u^{k+1}). \tag{9}$$

Теорема. *Если выполняются условия*

$$x^k \in \mathrm{ri}X, \quad u^k \in \mathrm{ri}U, \quad \Phi(x^k, u^k, \mu^k) \leqslant \theta\mu^k t_{\min},$$

то для алгоритма (7)–(9) справедливы следующие утверждения:

$$x^{k+1} \in \mathrm{ri}X, \quad u^{k+1} \in \mathrm{ri}U, \quad \Phi(x^{k+1}, u^{k+1}, \mu^{k+1}) \leqslant \theta\mu^{k+1} t_{\min}.$$

При этом $\mu^{k+1} \leqslant \mu^k$, *а при* $k \geqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$\mu^{k+1} \leqslant \left(1 - \sqrt{\theta}\sqrt{1-\theta}/\sqrt{\gamma n - \theta}\right)\mu^k. \tag{10}$$

Доказательство начнем с проверки сохранения балансовых ограничений-равенств. Для этого потребуется выражение для вектор-функции $u^k(\lambda)$:

$$u^k(\lambda) = (AX_k^2 M_k^{-1} A^T)^{-1}(AX_k^2 M_k^{-1} c - \lambda b). \tag{11}$$

Здесь $X_k = \operatorname{diag}\{x_j^k\}$, $M_k = \operatorname{diag}\{\mu^k t_j\}$,

$$Ax^{k+1} = \text{(см. (9))} = 2Ax^k - \frac{1}{\lambda^k}AX_k^2M_k^{-1}(c - A^Tu^{k+1}) = \text{(см. (11))}$$
$$= 2b - \frac{1}{\lambda^k}AX_k^2M_k^{-1}c + \frac{1}{\lambda^k}AX_k^2M_k^{-1}A^T(AX_k^2M_k^{-1}A^T)^{-1}(AX_k^2M_k^{-1}c - \lambda^k b) = b.$$

Решение задачи (8) достигается при выполнении ее ограничения как строгого равенства. Следовательно,

$$\Phi(x^k, u^{k+1}, \mu^{k+1}) = \theta\mu^{k+1}t_{\min}. \tag{12}$$

Убедимся в выполнении ограничений задачи (8) при $\lambda = 1$:

$$\Phi(x^k, u^k(1), \mu^k) \leqslant \text{(см. (7))} \leqslant \Phi(x^k, u^k, \mu^k) \leqslant \theta\mu^k t_{\min}.$$

Таким образом, решение задачи (8) достигается при $\lambda \leqslant 1$. Отсюда следует справедливость неравенства $\mu^{k+1} \leqslant \mu^k$. Так как по условию $x^k > 0$, то из (12) следует, что $g(u^{k+1}) > 0$.

На дальнейших шагах доказательства ключевым является следующее соотношение, получаемое с привлечением (9):

$$\mu^{k+1}t_j - x_j^{k+1}g_j(u^{k+1}) = \mu^{k+1}t_j - 2x_j^k g_j(u^{k+1}) + \frac{1}{\mu^{k+1}t_j}(x_j^k)^2(g_j(u^{k+1}))^2,$$
$$\mu^{k+1}t_j - x_j^{k+1}g_j(u^{k+1}) = \frac{1}{\mu^{k+1}t_j}(\mu^{k+1}t_j - x_j^k g_j(u^{k+1}))^2. \tag{13}$$

Отсюда с использованием (12) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\mu^{k+1}t_j - x_j^{k+1}g_j(u^{k+1})\Big) = \theta\mu^{k+1}t_{\min}. \tag{14}$$

Покажем справедливость неравенства $\Phi(x^{k+1}, u^{k+1}, \mu^{k+1}) \leqslant \theta\mu^{k+1}t_{\min}$:

$$\Phi(x^{k+1}, u^{k+1}, \mu^{k+1}) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\mu^{k+1}t_j}\Big(\mu^{k+1}t_j - x_j^{k+1}g_j(u^{k+1})\Big)^2$$
$$\leqslant \text{(см. (13))} \leqslant \frac{1}{\mu^{k+1}t_{\min}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(\mu^{k+1}t_j)^2}(\mu^{k+1}t_j - x_j^k g_j(u^{k+1}))^4$$
$$\leqslant \frac{1}{\mu^{k+1}t_{\min}}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\mu^{k+1}t_j}(\mu^{k+1}t_j - x_j^k g_j(u^{k+1}))^2\right)^2 = \theta^2\mu^{k+1}t_{\min} < \theta\mu^{k+1}t_{\min}.$$

Отсюда с учетом неравенства $g(u^{k+1}) > 0$ получаем $x^{k+1} > 0$.

Таким образом, остается доказать неравенство (10). Пусть $z_j^{k+1} = x_j^{k+1} g_j(u^{k+1})$. Выясним, при каких α выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mu^{k+1} t_j (1-\alpha)} \Big(\mu^{k+1} t_j - z_j^{k+1} - \alpha\mu^{k+1} t_j\Big)^2 \leqslant \theta(1-\alpha)\mu^{k+1} t_{\min}. \tag{15}$$

Раскрыв скобки и выполнив необходимые преобразования, получим

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mu^{k+1} t_j}(\mu^{k+1}t_j - z_j^{k+1})^2 - 2\alpha \sum_{j=1}^{n}(\mu^{k+1}t_j - z_j^{k+1}) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{n} \mu^{k+1} t_j\right) \Big/ (1-\alpha)$$
$$\overset{(14)}{\leqslant} \Big(\theta^2 \mu^{k+1} t_{\min} - 2\alpha\theta\mu^{k+1} t_{\min} + \alpha^2 n\gamma\mu^{k+1} t_{\min}\Big) \Big/ (1-\alpha).$$

Относительно α решаем неравенство

$$\Big(\theta^2 \mu^{k+1} t_{\min} - 2\alpha\theta\mu^{k+1} t_{\min} + \alpha^2 n\gamma\mu^{k+1} t_{\min}\Big) \Big/ (1-\alpha) \leqslant \theta(1-\alpha)\mu^{k+1} t_{\min}.$$

Умножив обе части неравенства на $\frac{1-\alpha}{\mu^{k+1} t_{\min}}$, получаем

$$\theta^2 - 2\alpha\theta + \alpha^2 n\gamma \leqslant \theta(1 - 2\alpha + \alpha^2), \quad \alpha^2(n\gamma - \theta) \leqslant (\theta - \theta^2).$$

Отсюда следует, что неравенство справедливо при любом

$$\alpha \leqslant \sqrt{\theta}\sqrt{1-\theta}/\sqrt{n\gamma - \theta}.$$

Таким образом, при $\alpha = \sqrt{\theta}\sqrt{1-\theta}/\sqrt{n\gamma-\theta}$ выполняется и условие (15), т. е.

$$\Phi\Big(x^{k+1}, u^{k+1}\Big(1 - \frac{\sqrt{\theta}\sqrt{1-\theta}}{\sqrt{n\gamma-\theta}}\Big)\mu^{k+1}\Big) \leqslant \theta\Big(1 - \frac{\sqrt{\theta}\sqrt{1-\theta}}{\sqrt{n\gamma-\theta}}\Big)\mu^{k+1} t_{\min}.$$

Значит, на $(k+2)$-итерации можно гарантированно продвинуться в соответствии с оценкой (10), даже не меняя значений переменных. Следовательно, начиная со второй итерации, выполняются все условия теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Максимальное значение α достигается при $\theta = 0,5$. В этом случае справедливо неравенство $\mu^{k+1} < (1 - 0,5/\sqrt{\gamma n})\mu^k$. Хотя, как показывают экспериментальные исследования, более перспективно использовать большие значения радиуса конуса скошенного пути, что несколько ухудшает оценку, но улучшает практические результаты.

Прямо-двойственный вариант алгоритма. Развитием прямого алгоритма является прямо-двойственный алгоритм. Его суть состоит в том, что закрепляется вектор u^k переменных двойственной задачи и вводится параметрическая функция

$$x^k(\lambda) = \arg \min_{x \in R^n | Ax = b} \Phi(x, u^k, \lambda\mu^k).$$

Выпишем ее в явном виде:

$$x^k(\lambda) = G_k^{-2}TA^Tr^k(\lambda) + \lambda\mu^k G_k^{-1}t,$$

где

$$r^k(\lambda) = (AG_k^{-2}TA^T)^{-1}(b - \lambda\mu^k AG_k^{-1}t).$$

Здесь $G_k = \operatorname{diag}\{g_j(u^k)\}$, $T = \operatorname{diag}\{t_j\}$.

Находим λ^k как решение задачи

$$\lambda \to \min_{\lambda>0}, \quad \Phi(x^k(\lambda), u^k, \lambda\mu^k) \leqslant \theta\lambda\mu^k t_{\min}$$

и осуществляем итеративный переход:

$$x^{k+1} = x^k(\lambda^k), \quad r^{k+1} = r^k(\lambda^k), \quad \mu^{k+1} = \lambda^k\mu^k, \quad u^{k+1} = u^k + \frac{1}{\mu^{k+1}}r^k(\lambda^k).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству прямого варианта алгоритма.

Задача определения допустимых режимов электроэнергетических систем. Есть предпосылки к тому, что алгоритмы скошенного пути окажутся эффективными при решении задачи определения допустимых режимов электроэнергетических систем (ЭЭС) [3]. Исходная задача является нелинейной и в общем виде записывается следующим образом: необходимо найти такой вектор z, что

$$W(z) = 0, \quad \overline{z} \geqslant z \geqslant \underline{z}.$$

Здесь z — вектор параметров режима ЭЭС, $\overline{z}$ и $\underline{z}$ — заданные векторы ограничений, $W(z)$ — нелинейная вектор-функция. Балансовые ограничения-равенства выводятся из законов Кирхгофа. Интервальные ограничения-неравенства задаются на величины напряжения и мощности активной и реактивной генерации в каждом узле, а также на перетоки активной и реактивной мощности в каждой ветви и значений коэффициентов трансформации, включенных у каждого из концов ветви.

Вектор z разбивается на два вектора: независимых переменных x и зависимых переменных y. Разбиение производится таким образом, чтобы при заданном x система уравнений $W(x, y) = 0$ была разрешима относительно вектора y. Существуют различные процедуры выбора состава компонент вектора x, использование которых приводит соответственно к различным наборам управляемых параметров.

Алгоритм решения задачи основан на сочетании метода приведенного градиента и последовательной линеаризации. На каждой итерации $t = 1, 2, \ldots$ выполняются [3] следующие действия.

1. Для допустимого по ограничениям-неравенствам вектора $x^t \in [\underline{x}; \overline{x}]$ находится вектор y^t, удовлетворяющий условию $W(x^t, y^t) = 0$.

2. Проверяется, удалось ли получить допустимый режим. Если справедливо включение $y^t \in [\underline{y}; \overline{y}]$, то вычислительный процесс завершается.

3. Определяется состав ограничений, учитываемых на данной итерации. Номера этих ограничений образуют множество I_V^t. В него обязательно входят такие номера i, что компоненты y_i^t не удовлетворяют ограничениям-неравенствам.

4. Пусть $I_V^t = \{1, \dots, m\}$. Далее будем считать, что вектор-функция W состоит только из компонент с номерами из I_V^t. Полагаем $B^t = \nabla_y W(x^t, y^t)$, $C^t = \nabla_x W(x^t, y^t)$. Линеаризуется условие $W(x, y) = 0$ в точке (x^t, y^t):

$$W(x^t, y^t) + B^t(y - y^t) + C^t(x - x^t) = 0.$$

После раскрытия скобок получаем $y - \tilde{y}^t = A^t x$, где $A^t = -(B^t)^{-1} C^t$, $\tilde{y}^t = y^t + (B^t)^{-1} C^t x^t$.

5. Решается задача

$$\alpha \to \min, \quad y = A^t x + \tilde{y}^t, \quad \overline{x} \geqslant x \geqslant \underline{x}, \quad \overline{y} \geqslant y + \alpha r^t \geqslant \underline{y}, \qquad \text{где } \alpha \geqslant 0, \tag{16}$$

относительно x, y и α. Здесь $r_i^t = (\overline{y}_i + \underline{y}_i)/2 - y_i^t$, $\quad i = 1, \dots, m$.

Поскольку набор $(x^t, y^t, \alpha = 1)$ является допустимым, данная задача имеет решение при некотором $\alpha \in [0; 1]$ (параметр α является показателем степени несовместности линеаризованной системы). Если оптимальное значение α равняется нулю, то система

$$\overline{x} \geqslant x \geqslant \underline{x}, \quad \overline{y} \geqslant A^t x + \tilde{y}^t \geqslant \underline{y} \tag{17}$$

совместна. Чем ближе оптимальное значение α к единице, тем больше должны нарушаться ограничения.

Полученное решение x задачи (16) принимается за исходную точку x^{t+1} на следующей итерации линеаризации.

Линеаризованная задача. Остановимся более подробно на алгоритме решения задачи (16). Осуществим центрирование и нормировку переменных:

$$x_j' = 2\frac{x_j - \underline{x}_j}{\overline{x}_j - \underline{x}_j}, \quad y_i' = 2\frac{y_i - \underline{y}_i}{\overline{y}_i - \underline{y}_i}, \text{ где } j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m \text{ и } \alpha' = \alpha.$$

Задача (16) сведется к следующей:

$$\alpha' \to \min, \quad Ax' - y' + \alpha' r = b, \quad 0 \leqslant x' \leqslant 2e, \quad 0 \leqslant y' \leqslant 2e. \tag{18}$$

Элементы матрицы A, а также векторов b и r вычисляются по формулам

$$a_{ij} = a^t_{ij}\frac{\overline{x}_j - \underline{x}_j}{\overline{y}_i - \underline{y}_i}, \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$r_i = \frac{2r^t_i}{\overline{y}_i - \underline{y}_i}, \quad b_i = 2\frac{\underline{y}_i - \tilde{y}^t_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a^t_{ij}\underline{x}_j}{\overline{y}_i - \underline{y}_i}, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Получив оптимальное решение задачи (18), перейдем к исходным переменным

$$x_j = \underline{x}_j + x'_j\frac{\overline{x}_j - \underline{x}_j}{2}, y_i = \underline{y}_i + y'_i\frac{\overline{y}_i - \underline{y}_i}{2}, \text{ где } j = 1,\ldots,n, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Для упрощения записи опустим штрихи над переменными в задаче (18). Введем неотрицательные переменные $s \in R^n$ и $q \in R^m$ такие, что по всем компонентам выполняются равенства $x_j + s_j = 2$, $y_i + q_i = 2$. Задача примет следующий вид:

$$\begin{array}{ll|l}
 & \alpha \to \min, & \\
 & Ax - y + \alpha r = b, & u \\
 & -x - s = -2e, & v \\
 & -y - q = -2e, & w \\
 & x \geqslant 0,\ s \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ \alpha \geqslant 0. &
\end{array} \qquad (19)$$

Справа от черты выписаны двойственные оценки соответствующих ограничений. Двойственная к (19) задача записывается следующим образом:

$$\begin{array}{l|l}
b^T u - 2e^T v - 2e^T w \to \max, & \\
g_1 = v - A^T u \geqslant 0, & x \\
g_2 = v \geqslant 0, & s \\
g_3 = u + w \geqslant 0, & y \\
g_4 = w \geqslant 0, & q \\
g_5 = 1 - r^T u \geqslant 0. & \alpha
\end{array} \qquad (20)$$

Справа от черты также выписаны двойственные оценки ограничений.

В [2] рассмотрено несколько алгоритмов оптимизации в конусе центрального пути, адаптированных для решения задач (19), (20), которые совмещали наличие полиномиальных оценок и достаточно эффективную работу на практике. Однако вычислительный процесс в них начинался с автоматически сформированной стартовой точки $x^0 = e$, которая для задачи (16) соответствует середине допустимого интервала. В то же время в качестве стартового приближения гораздо перспективнее использовать точку, которая соответствует x^t для задачи (16). Таким образом, в данной статье предлагается начинать решение задач (19), (20) с приближения

$$x_j^0 = 2\frac{x_j^t - \underline{x}_j}{\overline{x}_j - \underline{x}_j},\ s_j^0 = 2 - x_j^0,\ j = 1,\dots,n,\ y_i^0 = q_i^0 = 1,\ i = 1,\dots,m, \tag{21}$$
$$\alpha^0 = 1,\ u_i = 0,\ i = 1,\dots,m,\ v_j^0 = 1,\ j = 1,\dots,n,\ w_i^0 = 1,\ i = 1,\dots,m.$$

Здесь и появляется потребность в алгоритмах скошенного пути, поскольку они могут стартовать с любой относительно внутренней точки множества допустимых решений, какой является, в частности, точка (21). Алгоритм (7)–(9), как и прямо-двойственный его аналог, без существенных изменений можно адаптировать для решения задач (19), (20), за исключением двух дополнительных процедур.

Процедуры завершения вычислительного процесса.

1. Поскольку мы в первую очередь интересуемся нахождением допустимого решения системы линейных уравнений и неравенств (17), предлагаем специальную процедуру, формализующую завершение вычислительного процесса в случае совместности ограничений. На каждой итерации $k = 0, 1, 2, \dots$ проверяем, нельзя ли продвинуться вдоль направления корректировки с шагом $\gamma^k = -\alpha^k/\Delta\alpha^k$, т. е. нарушается ли хоть одно ограничение-неравенство в точке

$$x^{k+1} = x^k + \gamma^k \Delta x^k,\ s^{k+1} = s^k + \gamma^k \Delta s^k,\ y^{k+1} = y^k + \gamma^k \Delta y^k,\ q^{k+1} = q^k + \gamma^k \Delta q^k.$$

Если все они выполняются, то имеем допустимую точку системы (17), вычисляемую по формуле

$$x_j = \underline{x}_j^{k+1}\frac{\overline{x}_j - \underline{x}_j}{2}, \quad j = 1,\dots,n.$$

2. Для двух данных задач на основе одной из формулировок теоремы Фаркаша об альтернативных неравенствах удалось построить эффективный критерий несовместности. Если на некоторой итерации выполняется условие

$$\psi(u^k) = b^T u^k + 2e^T u_-^k - 2e^T (A^T u^k)_+ > 0,$$

то система (17) несовместна. Здесь $(u_+)_j = \max\{0, u_j\}$, $(u_-)_j = \min\{0, u_j\}$.

Проблема быстрой идентификации несовместности особенно актуальна в связи с тем, что линеаризованная система часто оказывается несовместной, в частности из-за погрешностей линеаризации. В этом случае нет необходимости точно решать задачи (19), (20), что может оказаться достаточно трудоемким процессом. Можно лишь перейти в новую точку, где заново провести линеаризацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зоркальцев В. И., Филатов А. Ю.** Новые алгоритмы оптимизации в конусе центрального пути // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1999. Т. 6, № 1. С. 33–42.
2. **Зоркальцев В. И., Филатов А. Ю.** Алгоритмы центрального пути для решения систем линейных уравнений и неравенств // Сб. докл. Междунар. конф. «Распределенные системы: оптимизация и приложения». Екатеринбург, 2000. С. 135–138.
3. **Мурашко Н. А., Охорзин Ю. А., Крумм Л. А. и др.** Анализ и управление установившимися состояниями ЭЭС. Новосибирск: Наука, 1987.
4. **Monteiro R., Adler I.** Interior path following primal-dual algorithms. Pt. I: Linear programming // Math. Program. Ser. A. 1989. V. 44, N 1. P. 27–49.

Адрес авторов:

Институт систем энергетики
им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130,
664033 Иркутск, Россия.
E-mail: fial@isem.sei.irk.ru

Статья поступила
17 ноября 2000 г.