

# КОМБИНИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ<sup>1</sup>

Зоркальцев Валерий Иванович, Филатов Александр Юрьевич  
(Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, e-mail:  
fial@isem.sei.irk.ru)

В работе предлагаются комбинированные алгоритмы внутренних точек для задач линейного программирования и систем линейных неравенств. Их особенностью является то, что направление корректировки вычисляется как линейная комбинация аффинно-масштабирующего и центрирующего направлений. Последнее находится как решение задачи минимизации квадратичной аппроксимации логарифмической барьерной штрафной функции. Приведены результаты экспериментального исследования предложенных алгоритмов, демонстрирующие их высокую эффективность.

## ВВЕДЕНИЕ

Линейная оптимизация (поиск экстремума линейной функции при ограничениях в форме линейных равенств и неравенств) – один из важнейших разделов математики как в плане теоретических исследований, так и в плане практических приложений. Огромное количество проблем так или иначе сводится к необходимости решения задачи линейного программирования или получения решения системы линейных неравенств. Одним из наиболее распространенных методов их решения являются алгоритмы внутренних точек. Вычислительный процесс в них, в отличие от симплекс-метода, перебирающего угловые точки многогранника допустимых решений, происходит в относительной внутренней допустимости множества.

Основными классами алгоритмов внутренних точек являются аффинно-масштабирующие алгоритмы [1] и алгоритмы центрального пути [2]. Основная идея первых состоит в исключении из задачи ограничений-неравенств путем введения в целевую функцию квадратичного штрафа за приближение к границам допустимой области. Алгоритмы центрального пути и их модификации строятся на идее К.Фриша [3] введения в целевую функцию штрафных слагаемых в виде логарифма ограничений-неравенств с параметром, монотонно уменьшающимся до нуля.

В то же время, несмотря на имеющиеся различия (различные способы исключения ограничений-неравенств; наличие полиномиальных оценок максимального объема вычислений у алгоритмов центрального пути и отсутствие таковых у аффинно-масштабирующих алгоритмов; необходимость формирования особого стартового приближения для алгоритмов центрального пути и т.д.), нетрудно заметить, что формулы алгоритмов близки.

---

<sup>1</sup> Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00587), интеграционного проекта СО РАН №6, выполняемого в содружестве с учеными УрО РАН, и Фонда содействия отечественной науке.

Целью данной работы является создание комбинированного алгоритма, объединяющего с помощью несложной вычислительной процедуры, идеи, использующиеся обоими классами алгоритмов.

## КОМБИНИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается пара взаимно-двойственных задач линейного программирования:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}, \quad \mathbf{X} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{u} \rightarrow \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}}, \quad \mathbf{U} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^m: \mathbf{g}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \right\}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{A}$  – матрица размерности  $m \times n$ ,  $\text{rank } \mathbf{A} = m$ .

### Аффинно-масштабирующие алгоритмы

Вычислительный процесс в аффинно-масштабирующих алгоритмах начинается с любого стартового приближения  $\mathbf{x}^1 > \mathbf{0}$ . На каждой итерации  $k = 1, 2, \dots$  ищется вектор невязок балансовых ограничений-равенств

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k. \quad (3)$$

Итеративный переход осуществляется по правилу

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda^k \Delta \mathbf{x}^k, \quad (4)$$

где  $\Delta \mathbf{x}^k$  – направление корректировки, вычисляемое как решение задачи

$$\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta x_j^2 / (x_j^k)^2 \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}^k, \quad (5)$$

а  $\lambda^k$  – шаг корректировки, задаваемый из соображений невыхода переменных прямой задачи за пределы внутренности допустимой области:

$$\lambda^k = \gamma \min_{j: \Delta x_j^k < 0} \left( -x_j^k / \Delta x_j^k \right). \quad (6)$$

Здесь  $\gamma$  – заданная константа из интервала  $(0; 1)$ . Отметим, что на фазе ввода в допустимую область (т. е. при  $\mathbf{r}^k \neq \mathbf{0}$ ) шаг  $\lambda^k$  должен ограничиваться сверху единицей.

Задача (5) решается методом множителей Лагранжа. Сначала находим двойственные оценки  $\mathbf{u}^{k+1}$  ограничений-равенств  $\mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}^k$ :

$$\mathbf{u}^{k+1} = \left( \mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{A}^T \right)^{-1} \left( \mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{c} + \mathbf{r}^k \right), \quad (7)$$

а затем непосредственно вычисляем направление корректировки:

$$\Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{X}_k^2 \mathbf{g}(\mathbf{u}^{k+1}). \quad (8)$$

Здесь и далее  $\mathbf{X}_k = \text{diag} \{ x_j^k \}$ .

### Алгоритмы центрального пути

Для инициализации алгоритма центрального пути [2] необходима стартовая точка  $(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1, \mu^1)$ , удовлетворяющая условиям

$$\mathbf{x}^k \in \mathbf{X}, \mathbf{u}^k \in \mathbf{U}, \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu^k} \left( \mu^k - x_j^k g_j(\mathbf{u}^k) \right)^2 \leq \theta \mu^k \quad (9)$$

при  $k = 1$ .

Точным решением задачи минимизации логарифмической барьерной функции на множествах допустимых решений пары задач (1)–(2)

$$f_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} - \mu \sum_{j=1}^n \ln(x_j g_j(\mathbf{u})) \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{u} \in \mathbf{U}} \quad (10)$$

при любом  $\mu > 0$  является пара векторов  $\mathbf{x}(\mu), \mathbf{u}(\mu)$ , для которой все компоненты вектора невязки двойственности равны между собой:

$$x_j(\mu) g_j(\mathbf{u}(\mu)) = \mu, \quad j = 1, \dots, n.$$

Множество пар векторов  $\mathbf{x}(\mu), \mathbf{u}(\mu)$  при всех  $\mu > 0$  образует центральный путь.

Алгоритмами центрального пути вырабатываются последовательности пар векторов  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)$  и соответствующих значений  $\mu^k$ , для которых при заданном  $\theta \in (0;1)$  справедливы условия (9). При этом для некоторого  $\beta > 0$  выполняется неравенство

$$\mu^{k+1} \leq \left(1 - \beta/\sqrt{n}\right) \mu^k,$$

что обеспечивает [4] получение решения пары задач (1)–(2) за  $O(\sqrt{n}L)$  итераций. Здесь и далее  $L$  – объем [4] входных данных задачи.

Задача (10) распадается на 2 формально несвязанные задачи – относительно вектора переменных  $\mathbf{x}$  и вектора переменных  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu \sum_{j=1}^n \ln x_j \rightarrow \min, \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (11)$$

и

$$\mathbf{b}^T \mathbf{u} + \mu \sum_{j=1}^n \ln g_j(\mathbf{u}) \rightarrow \max, \quad \mathbf{g} + \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{c}.$$

Идейной основой прямых алгоритмов центрального пути является приближенное решение методом Ньютона задачи (11):

$$\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} - \mu^k \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j}{x_j^k} + \frac{1}{2} \mu^k \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j^2}{(x_j^k)^2} \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

При ее решении методом Лагранжа получаем следующие формулы итеративного перехода:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \left( \mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{A}^T \right)^{-1} \left( \mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{c} - \mu^k \mathbf{b} \right), \quad (13)$$

$$\Delta \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^k - \frac{1}{\mu^k} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{g}(\mathbf{u}^{k+1}), \quad (14)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k. \quad (15)$$

Для выполнения на следующей итерации условий (9) пересчет параметра центрального пути можно, в частности, осуществлять по правилу

$$\mu^{k+1} = \left(1 - 0,5/\sqrt{n - 0,5}\right)\mu^k.$$

### Комбинированные алгоритмы

Начиная с произвольной стартовой точки  $\mathbf{x}^1 > \mathbf{0}$ , будем для нахождения направления корректировки  $\Delta\mathbf{x}^k$  на каждой итерации решать следующую параметрическую задачу минимизации:

$$\mathbf{c}^T \Delta\mathbf{x} - \mu \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j}{x_j^k} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j^2}{(x_j^k)^2} \rightarrow \min_{\Delta\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{r}^k. \quad (16)$$

Здесь, как и раньше,  $\mathbf{r}^k$  – вектор невязок ограничений-равенств, вычисляемый по формуле (3). Заметим, что если значение параметра  $\mu$  равно нулю, то формулы задачи (16) полностью совпадают с формулами (5) задачи, решаемой при реализации аффинно-масштабирующего алгоритма. При  $\mu = 1$  задача (16) дает такое же направление  $\Delta\mathbf{x}^k$ , как и задача (12), решаемая в алгоритме центрального пути, за исключением того, что теперь не требуется иметь труднополучаемого (существующие процедуры [4], [5] его автоматического формирования базируются на идее сведения исходной задачи к расширенной, малопривлекательной с вычислительной точки зрения, задаче специального вида) стартового приближения, удовлетворяющего при  $k = 1$  условиям (9).

Задачу (16) будем решать методом множителей Лагранжа. Двойственные оценки  $\mathbf{u}^{k+1}$  ограничений-равенств  $\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{r}^k$  найдем по формуле

$$\mathbf{u}^{k+1}(\mu) = \left(\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{A}^T\right)^{-1} \left(\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{c} + \mathbf{r}^k - \mu\mathbf{b}\right). \quad (17)$$

Направление корректировки вычислим следующим образом:

$$\Delta\mathbf{x}^k(\mu) = \mu\mathbf{x}^k - \mathbf{X}_k^2\mathbf{g}\left(\mathbf{u}^{k+1}(\mu)\right). \quad (18)$$

Снова отметим, что формулы (17)–(18) при  $\mu = 0$  сводятся к формулам (7)–(8), а при  $\mu = 1$  и  $\mathbf{r}^k = \mathbf{0}$  – к формулам (13)–(14).

Легко обнаружить, что функции  $\mathbf{u}^{k+1}(\mu)$  и  $\Delta\mathbf{x}^k(\mu)$  являются линейными относительно  $\mu$ . Таким образом, можно вычислить 2 вектора

$$\mathbf{u}^{k+1}(0) = \left(\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{A}^T\right)^{-1} \left(\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{c} + \mathbf{r}^k\right)$$

и

$$\mathbf{u}^{k+1}(1) = \left(\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{A}^T\right)^{-1} \left(\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{c} + \mathbf{r}^k - \mathbf{b}\right),$$

что принципиально не сложнее исходной задачи, поскольку здесь по сути решается одна и та же система линейных уравнений с 2 правыми частями, и искомая функция  $\mathbf{u}^{k+1}(\mu)$  будет иметь вид

$$\mathbf{u}^{k+1}(\mu) = (1 - \mu)\mathbf{u}^{k+1}(0) + \mu\mathbf{u}^{k+1}(1).$$

Аналогично, итоговое направление корректировки  $\Delta \mathbf{x}^k(\mu)$  будет линейной комбинацией

$$\Delta \mathbf{x}^k(\mu) = (1 - \mu) \Delta \mathbf{x}^k(0) + \mu \Delta \mathbf{x}^k(1),$$

аффинно-масштабирующего

$$\Delta \mathbf{x}^k(0) = -\mathbf{X}_k^2 \mathbf{g}(\mathbf{u}^{k+1}(0))$$

и центрирующего

$$\Delta \mathbf{x}^k(1) = \mathbf{x}^k - \mathbf{X}_k^2 \mathbf{g}(\mathbf{u}^{k+1}(1))$$

направлений. При этом для каждого направления легко найти максимальный шаг, с которым можно производить корректировку, оставаясь внутри допустимой области по ограничениям-неравенствам:

$$\lambda^k(\mu) = \gamma \min_{j: \Delta x_j^k(\mu) < 0} \left( -x_j^k / \Delta x_j^k(\mu) \right).$$

Таким образом, путем небольшого усложнения алгоритма мы получили целое множество направлений корректировки  $\Delta \mathbf{X} = \{ \Delta \mathbf{x}^k(\mu) : \mu \in [0; 1] \}$ . Из этого множества возможных направлений мы должны выбрать наиболее предпочтительное в целях скорейшего решения задачи.

Работа алгоритма разделяется на 2 этапа. На первом – необходимо максимально быстро найти допустимую точку, удовлетворяющую равенствам  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Поскольку уменьшение невязки ограничений-равенств осуществляется в соответствии с формулой

$$\mathbf{r}^{k+1} = (1 - \lambda^k) \mathbf{r}^k,$$

то на первом этапе в качестве критерия можно использовать задачу

$$\lambda^k(\mu) \rightarrow \max_{\mu \in [0; 1]} . \quad (19)$$

На втором этапе необходимо максимально быстро сокращать невязку двойственности (разницу значений целевых функций прямой и двойственной задачи), равную

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n x_j g_j(\mathbf{u}).$$

Таким образом, критерием второго этапа будет следующая задача:

$$\sum_{j=1}^n \left( x_j^k + \lambda^k(\mu) \Delta x_j^k(\mu) \right) g_j(\mathbf{u}^{k+1}(\mu)) \rightarrow \min_{\mu \in [0; 1]} . \quad (20)$$

И на первом, и на втором этапе необязательно решать задачи (19) и (20) точно. Достаточно вычислить критерии для нескольких точек на интервале  $\mu \in [0; 1]$ , найти наилучшее значение  $\mu^k$ , отыскать направление  $\Delta \mathbf{x}^k(\mu^k)$  и шаг  $\lambda^k(\mu^k)$  корректировки и осуществить итеративный переход

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda^k(\mu^k) \Delta \mathbf{x}^k .$$

Нельзя гарантировать, что локальный выигрыш на одной итерации ведет и к ускорению всего вычислительного процесса относительно фиксированного случая  $\mu = 0$ , соответствующего формулам (3)–(8) аффинно-масштабирующего алгоритма. Действительно, вычислительные процессы для разных значений  $\mu$  приводят к различным траекториям. Поэтому одна из целей экспериментального исследования состоит в проверке: имеет ли место ускорение на тестовых задачах.

### Экспериментальное исследование

Сопоставим объем вычислений, потребовавшийся для получения решения тестовых задач аффинно-масштабирующим и комбинированным алгоритмом. Итеративный процесс начинался с единичного вектора соответствующей размерности ( $\mathbf{x}^1 = \mathbf{e}_n$ ). Критерием останова было достижение невязкой двойственности  $\sum x_j g_j(\mathbf{u})$  заданного критического значения  $\varepsilon = 0.000005$ .

Как уже отмечалось, в пределах одной итерации параметризация в комбинированных алгоритмах не влияет существенно на увеличение объема вычислений. Таким образом, алгоритмы имеют приблизительно одинаковый объем вычислений на каждой итерации – наибольшую сложность представляет обращение симметричной положительно определенной матрицы размерности  $m \times m$ . Поэтому данные о числе итераций могут быть использованы в качестве сравнительной характеристики объема вычислений.

Для тестирования были сгенерированы наборы случайных задач различной размерности (по 10 – каждой). В табл. 1 внесено количество итераций, потребовавшееся алгоритмам для решения каждой из них (значения указаны через дробь). Задачи (19) и (20) решались приближенно. Значения критериев вычислялись в 10 точках, при  $\mu_i^k = 1/2^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 8$ ;  $\mu_{10}^k = 0$ .

Рассмотрим еще одну небольшую модификацию комбинированного алгоритма – когда значения  $\mu^k$  могут превышать 1, что означает усиление центрирующего направления. Пусть к 10 точкам  $\mu^k$ , для которых вычисляются значения критериев (19) и (20), добавится еще  $\mu^k = 2$ . Значения числа итераций для этого варианта алгоритма также запишем в таблицу.

**Таблица 1.** Число итераций, необходимое для решения задач линейного программирования различными алгоритмами

Алгоритмы \ Размерн. задач	20 × 40	40 × 80	100 × 200	200 × 500
<b>Аффинно- масштабирующий</b>	36/32/22/37/31 29/36/20/27/41	31/34/29/40/33 28/45/39/29/22	26/63/25/22/31 24/22/28/25/24	26/31/27/32/30 25/26/26/30/33
<b>Комбинирован- ный</b>	28/22/18/23/33 26/25/19/29/28	21/19/23/34/26 21/27/31/20/19	20/47/21/20/20 20/20/21/22/20	22/23/22/22/23 22/23/22/24/23
<b>Комб. расширен. <math>\mu \in [0; 2]</math></b>	21/19/18/20/33 28/21/18/30/28	22/19/19/25/22 23/28/21/19/19	21/49/21/21/21 20/20/22/21/20	23/22/21/22/23 23/23/22/23/23

Вычислим среднее значение  $it$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$  числа итераций. Их запишем в сводную табл. 2

**Таблица 2.** Среднее значение и среднеквадратическое отклонение числа итераций, необходимое для решения задач

Алгоритмы \ Размерн. задач	20 × 40	40 × 80	100 × 200	200 × 500
<b>Аффинно- масштабирующий</b>	$it = 31,1$ $\sigma = 6,39$	$it = 33,0$ $\sigma = 6,42$	$it = 29,1$ $\sigma = 11,62$	$it = 28,6$ $\sigma = 2,76$
<b>Комбинирован- ный</b>	$it = 25,1$ $\sigma = 4,44$	$it = 24,1$ $\sigma = 4,97$	$it = 23,1$ $\sigma = 7,99$	$it = 22,6$ $\sigma = 0,66$
<b>Комб. расширен. <math>\mu \in [0; 2]</math></b>	$it = 23,6$ $\sigma = 5,28$	$it = 21,7$ $\sigma = 2,87$	$it = 23,6$ $\sigma = 8,49$	$it = 22,5$ $\sigma = 0,67$

На основе проведенных экспериментов видно, что с помощью предложенной процедуры параметризации можно примерно на четверть сократить объем вычислений. На большинстве задач дополнительное ускорение было получено в результате использования значений  $\mu^k = 2$ .

### КОМБИНИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Комбинированный алгоритм можно применять и для решения систем линейных неравенств. Необходимость решения таких систем часто возникает в связи с реализацией нелинейных моделей из различных прикладных областей на основе методов последовательной линеаризации. В частности, в наших исследованиях к системам линейных неравенств относительно векторов переменных  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  и  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$  вида

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{x} \geq \underline{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{y} \geq \underline{\mathbf{y}} \quad (21)$$

сводится задача поиска допустимых режимов электроэнергетических систем [6]. Здесь  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  - заданная матрица,  $\bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$  и  $\bar{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbf{R}^m$  - заданные векторы ограничений, причем  $\bar{\mathbf{x}} > \underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} > \underline{\mathbf{y}}$ . Необходимо либо отыскать допустимое решение системы (21), либо максимально быстро идентифицировать факт ее несовместности.

Дополнительным преимуществом комбинированного алгоритма перед аффинно-масштабирующим будет то, что, как правило, результатом его работы является точка, находящаяся ближе к середине допустимого интервала, что является полезным свойством при решении исходной нелинейной задачи.

#### Описание алгоритма

Вычислительный процесс начинаем с произвольной пары векторов, удовлетворяющей в строгой форме ограничениям-неравенствам

$$\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{x}^1 > \underline{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{y}} > \mathbf{y}^1 > \underline{\mathbf{y}}.$$

На каждой итерации вычисляем вектор невязки ограничений-равенств

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{y}^k - \mathbf{A}\mathbf{x}^k.$$

Направление корректировки  $(\Delta\mathbf{x}^k(\mu_x, \mu_y), \Delta\mathbf{y}^k(\mu_x, \mu_y))$  ищем как решение задачи

$$\begin{aligned} & -\mu_x \left( (\mathbf{D}_k^1)^{-1} - (\mathbf{D}_k^2)^{-1} \right) \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{x})^T \left( (\mathbf{D}_k^1)^{-2} + (\mathbf{D}_k^2)^{-2} \right) \Delta\mathbf{x} - \\ & -\mu_y \left( (\mathbf{D}_k^3)^{-1} - (\mathbf{D}_k^4)^{-1} \right) \Delta\mathbf{y} + \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{y})^T \left( (\mathbf{D}_k^3)^{-2} + (\mathbf{D}_k^4)^{-2} \right) \Delta\mathbf{y} \rightarrow \min_{\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} - \Delta\mathbf{y} = \mathbf{r}^k. \quad (23)$$

Здесь и далее

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k^1 &= \text{diag} \{ x_j^k - \underline{x}_j \}, \quad \mathbf{D}_k^2 = \text{diag} \{ \bar{x}_j - x_j^k \}, \\ \mathbf{D}_k^3 &= \text{diag} \{ y_i^k - \underline{y}_i \}, \quad \mathbf{D}_k^4 = \text{diag} \{ \bar{y}_i - y_i^k \}. \end{aligned}$$

Параметризация происходит уже по двум направлениям. Пара значений  $\mu_x = 0$ ,  $\mu_y = 0$  соответствует варианту аффинно-масштабирующего метода. При  $\mu_x = 1$ ,  $\mu_y = 1$  целевая функция (22) является квадратичной аппроксимацией логарифмической барьерной штрафной функции, что делает алгоритм идейно сходным с алгоритмами центрального пути. В целом, чем больше величины  $\mu_x$  и  $\mu_y$ , тем ярче выражено центрирующее направление.

Решением задачи (22), (23) будут векторы

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}^k(\mu_x, \mu_y) &= \left( (\mathbf{D}_k^1)^{-2} + (\mathbf{D}_k^2)^{-2} \right)^{-1} \left( \mathbf{A}^T \mathbf{u}^k(\mu_x, \mu_y) + \mu_x (\mathbf{D}_k^1)^{-1} \mathbf{e} - \mu_x (\mathbf{D}_k^2)^{-1} \mathbf{e} \right), \\ \Delta\mathbf{y}^k(\mu_x, \mu_y) &= \left( (\mathbf{D}_k^3)^{-2} + (\mathbf{D}_k^4)^{-2} \right)^{-1} \left( -\mathbf{u}^k(\mu_x, \mu_y) + \mu_x (\mathbf{D}_k^3)^{-1} \mathbf{e} - \mu_x (\mathbf{D}_k^4)^{-1} \mathbf{e} \right), \end{aligned}$$

где вектор множителей Лагранжа ограничений (23) выражается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^k(\mu_x, \mu_y) &= \left( \mathbf{A}\mathbf{Z}_x^k \mathbf{A}^T + \mathbf{Z}_y^k \right)^{-1} \times \\ &\times \left( \mathbf{r}^k - \mathbf{A}\mathbf{Z}_x^k (\mu_x \mathbf{D}_k^1 \mathbf{e} - \mu_x \mathbf{D}_k^2 \mathbf{e}) + \mathbf{Z}_y^k (\mu_y \mathbf{D}_k^3 \mathbf{e} - \mu_y \mathbf{D}_k^4 \mathbf{e}) \right) \end{aligned}$$

при

$$\mathbf{Z}_x^k = \left( (\mathbf{D}_k^1)^{-2} + (\mathbf{D}_k^2)^{-2} \right)^{-1}, \quad \mathbf{Z}_y^k = \left( (\mathbf{D}_k^3)^{-2} + (\mathbf{D}_k^4)^{-2} \right)^{-1}.$$

Поскольку  $\Delta\mathbf{x}^k$  и  $\Delta\mathbf{y}^k$  представляют собой линейные относительно  $\mu_x$  и  $\mu_y$  вектор-функции, то несложно решить задачу выбора оптимальных значений параметров  $\mu_x^k$  и  $\mu_y^k$ , доставляющих максимально возможный (из условий невыхода переменных

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda^k(\mu_x, \mu_y) \Delta\mathbf{x}^k(\mu_x, \mu_y), \quad \mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \lambda^k(\mu_x, \mu_y) \Delta\mathbf{y}^k(\mu_x, \mu_y)$$

за границы допустимых интервалов) шаг корректировки  $\lambda^k(\mu_x, \mu_y)$ . Шаг  $\lambda^k = 1$  соответствует нахождению допустимого решения системы (21).



Вектор  $\mathbf{u}^k(\mu_x, \mu_y)$  множителей Лагранжа ограничений (23) при любых значениях  $\mu_x$  и  $\mu_y$  также может использоваться для идентификации несовместности на основе следующего критерия [7]. Система (21) несовместна в том и только в том случае, когда существует вектор  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ , для которого

$$\psi(\mathbf{u}) > 0,$$

где

$$\psi(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{u}_- + \underline{\mathbf{y}}^T \mathbf{u}_+ - \bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u})_+ - \underline{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u})_-,$$

$$(\mathbf{u}_+)_i = \max\{0, u_i\}, (\mathbf{u}_-)_i = \min\{0, u_i\}.$$

Соответственно, если при некоторых значениях  $\mu_x$  и  $\mu_y$

$$\psi(\mathbf{u}^k(\mu_x, \mu_y)) > 0,$$

то система (21) несовместна, и расчеты можно завершить, перейдя к новой итерации линеаризации. В то же время несовместность ограничений линеаризованной подзадачи может служить сигналом о возможной несовместности исходной нелинейной системы.

### Экспериментальное исследование

Сравним скорость сходимости аффинно-масштабирующего и комбинированного алгоритма на системах неравенств. Протестируем их на 14 совместных и 14 несовместных (так для краткости будем называть задачи с несовместными ограничениями) задачах размерности от  $30 \times 80$  до  $41 \times 80$ , полученных из моделей управления режимами электроэнергетических систем. Исследуемые электроэнергетические системы содержат гораздо большее количество узлов (как правило, несколько сотен), однако благодаря специальной процедуре [6] на каждой итерации учитывается только небольшая часть ограничений. Результаты экспериментального исследования сведены в табл. 3. Внесем в нее среднее, а также (в скобках) минимальное и максимальное число итераций, необходимое для получения решения обоими алгоритмами.

**Таблица 3.** Среднее, минимальное и максимальное число итераций, необходимое для решения совместных и несовместных задач

Алгоритмы \ задачи	Совмест.задачи ( $30 \times 80$ ) – ( $41 \times 80$ )	Несовмест.задачи ( $30 \times 80$ ) – ( $41 \times 80$ )
<b>Аффинно-масштабирующий</b>	9,5 (3–13)	1,6 (1–5)
<b>Комбинированный</b>	5,7 (1–8)	1 (все 1)

Интересно сопоставить аффинно-масштабирующий и комбинированный алгоритмы на исходной нелинейной задаче поиска допустимых режимов ЭЭС. Для сопоставления выберем 4 реальные схемы, расчеты на которых осуществлялись О.Н.Войтовым, - ZMIN (152 узла), IEEE118F (118 узлов), KUZBF (207 узлов) и ZIMKRASN (211 узлов). В табл. 4 приведем

суммарное число итераций (равное числу обращений матрицы), необходимых для получения допустимого режима, а также число, потребовавшихся для этого итераций линеаризации.

**Таблица 4.** Число итераций, необходимое для решения исходной задачи поиска допустимых режимов ЭЭС

Алгоритмы \ схемы	ZMIN	IEEE118F	KUZBF	ZIMKRASN
<b>Афф.-масштабир.</b>	11 (3глоб.)	54 (11глоб.)	39 (7глоб.)	74 (9глоб.)
<b>Комбинированный</b>	4 (3глоб.)	50 (17глоб.)	33 (3глоб.)	55 (6глоб.)

Экспериментальное исследование показало, что на системах линейных неравенств, как и на задачах линейного программирования, комбинированный алгоритм внутренних точек демонстрирует ускорение относительно уже зарекомендовавшего себя на практике и реализованного в программно-вычислительных комплексах (в частности, СДО) аффинно-масштабирующего алгоритма. Комбинированный алгоритм быстрее получает допустимое решение либо идентифицирует несовместность ограничений системы неравенств. Кроме того, благодаря своей способности вырабатывать решения, более удаленные от границ допустимой области с помощью комбинированного алгоритма часто удается сократить число глобальных итераций при решении нелинейных задач.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дикин И.И., Зоркальцев В.И.** Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек. – Новосибирск: Наука, 1980. – 220 с.
2. **Зоркальцев В.И.** Алгоритмы оптимизации в конусе центрального пути // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2000. – Т. 40, № 2. – С. 318–327.
3. **Frisch K.** The logarithmic potential method for solving linear programming problems // Memorandum, University Institute of Economics. – Oslo, 1955.
4. **Monteiro R., Adler I.** Interior path-following primal-dual algorithms. Part 1: Linear programming // Mathematical programming. – 1989. – № 44. – P. 27–49.
5. **Ye Y., Todd M., Mizuno S.** An  $O(\sqrt{n})$ -iteration homogeneous and self-dual linear programming algorithm // Mathematics of operation research. – 1994. – <sup>1</sup> 19. – P. 53–67.
6. **Войтов О.Н., Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю.** Исследование итеративной процедуры определения допустимых режимов ЭЭС // Известия Академии Наук. Энергетика. – 2000, №6. – С. 64–73.
7. **Войтов О.Н., Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю.** Исследование систем неравенств алгоритмами внутренних точек на задачах поиска допустимых режимов электроэнергетических систем. – Иркутск, 1997. – 30 с. – (Препр. СЭИ СО РАН; № 10).