Преподавание курса «Методы внутренних точек»

Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. (ИГУ, Иркутск)

При решении многих задач из различных прикладных областей широкое применение находят методы линейной оптимизации. В частности, к задачам линейного программирования и тесно связанным с ними системам линейных уравнений и неравенств сводятся многие существенно нелинейные модели, при реализации которых используется итеративная линеаризация.

В большинстве математических, технических и других вузов в том или ином виде читается курс линейного программирования. Однако в его рамках, как правило, изучается исключительно симплекс-метод. В то же время, симплекс-метод является далеко не единственным способом решения задач линейного программирования. В частности, в 60–70-х годах зародилось альтернативное направление – методы внутренних точек, первый из которых был опубликован в 1967 году И.И. Дикиным. Их название связано с тем, что, в отличие от симплекс-метода, перебирающего угловые точки многогранника допустимых решений, вычислительный процесс в методах внутренних точек происходит в относительной внутренности допустимого множества. Схематически траектории обоих классов алгоритмов изображены на рис.1.

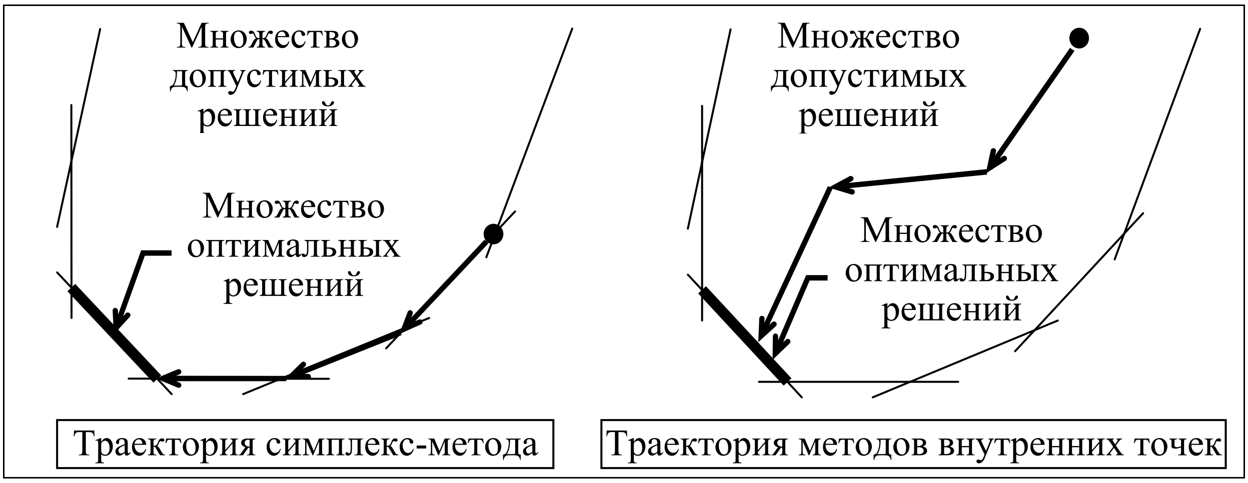

Рис.1. Траектории симплекс-метода и методов внутренних точек

Рассмотрим пару взаимно-двойственных задач линейного программирования следующего вида:

$$\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \to \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}:\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\right\}, \tag{1}$$

$$\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{u} \to \max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}}, \quad \mathbf{U} = \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}}:\ \mathbf{g}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{c} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{u} \ge \mathbf{0}\right\}, \tag{2}$$

где $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, $\mathbf{A}$ – матрица размерности $m \times n$, $rank\,\mathbf{A} = m$. Здесь $\mathbf{X}$, $\mathbf{U}$ – множества допустимых решений задач (1), (2). Задача (1) обычно называется прямой, а задача (2) – двойственной.

Ключевая идея алгоритмов внутренних точек состоит в исключении из задачи ограничений-неравенств путем введения в целевую функцию квадратичного или логарифмического штрафа за приближение к границам допустимой области.

В аффинно-масштабирующих алгоритмах вычислительный процесс начинается с произвольного приближения $\mathbf{x^1} > \mathbf{0}$. На каждой итерации вычисляется вектор невязок балансовых ограничений-равенств $\mathbf{r^k} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax^k}$.

Для определения направления корректировки $\Delta\mathbf{x^k}$ решается задача

$$\mathbf{c^T}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta x_j^2}{d_j^k} \to \min_{\Delta\mathbf{x}\in\mathbf{R^n}}, \quad \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{r^k},$$

где величины $1/d_j^k$, способ вычисления которых определяется вариантом алгоритма, можно интерпретировать как штрафы, сдерживающие выход переменных на ближайшие границы области допустимых решений.

Шаг корректировки λ^k находится из соображений невыхода переменных прямой задачи за пределы внутренности допустимой области:

$$\lambda^k = \gamma \min_{j:\Delta x_j^k<0}\left(-x_j^k \big/ \Delta x_j^k\right).$$

Здесь γ – заданная константа из интервала (0;1). Отметим, что на фазе ввода в допустимую область (т. е. при $\mathbf{r^k} \neq \mathbf{0}$) шаг λ^k должен ограничиваться сверху единицей.

Итеративный переход осуществляется по правилу

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + \lambda^k\Delta\mathbf{x^k}.$$

Невязки ограничений-равенств сокращаются по итерациям по правилу

$$\mathbf{r^{k+1}} = \left(1-\lambda^k\right)\mathbf{r^k}.$$

Повышенный интерес к методам внутренних точек (результатом которого стали более 2000 опубликованных статей) в мировой науке возник вслед за созданием в 1984 году Н. Кармаркаром первого алгоритма данного класса, обладающего полиномиальными гарантированными оценками максимального объема вычислений, необходимых для решения задачи.

К полиномиальным алгоритмам, в частности, относятся алгоритмы центрального пути и их модификации, которые строятся на идее К.Фриша введения в целевую функцию штрафных слагаемых в виде логарифма ограничений-неравенств с параметром, монотонно уменьшающимся до нуля.

Методы внутренних точек к настоящему времени превратились из красивой теоретической конструкции в полноценный инструмент, позволяющий решать практические задачи большой размерности. Большинство распространенных программных продуктов (среди которых можно выделить CPlex, BPMPD, MOSEK, PCx, HOPDM и LOQO) позволяет решать задачи алгоритмами внутренних точек. При этом последние демонстрируют свою высокую эффективность как на задачах с заполненными матрицами, так и на задачах с блочной структурой и высокой степенью разреженности, а также на плохо обусловленных задачах. Поэтому введение в вузах преподавания основ методов внутренних точек, в том числе, в рамках отдельного спецкурса или курса по выбору, является актуальным и своевременным.

Предлагаемый курс предполагает изучение базовых вариантов методов внутренних точек, а также их модификаций; приемов, позволяющих адаптировать алгоритмы к задачам в нестандартной постановке. Также рассматриваются методы решения ряда вспомогательных задач, среди которых можно выделить поиск стартового приближения, быструю идентификацию случая несовместности ограничений решение систем линейных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. Приводятся примеры практических задач, на которых методы внутренних точек продемонстрировали свою высокую эффективность. Особое внимание уделяется изучению теоретических основ линейной оптимизации, в частности, теории двойственности.

Примерный план семестрового курса:

1. **Теоретические основы линейной оптимизации.** Пара взаимно-двойственных задач линейного программирования. Основные факты теории двойственности.

2. **Аффинно-масштабирующие алгоритмы для решения задач линейного программирования.** Истоки алгоритмов внутренних точек. Прямые аффинно-масштабирующие алгоритмы. Способы задания весовых коэффициентов. Ввод в допустимую область. Двойственные аффинно-масштабирующие алгоритмы.

3. **Полиномиальные алгоритмы для решения задач линейного программирования.** Исторический экскурс в полиномиальные алгоритмы. Идейная основа и общая схема алгоритмов центрального пути. Простейший вариант алгоритма центрального пути. Процедуры, ускоряющие вычислительный процесс. Двойственные алгоритмы центрального пути. Использование более высоких степеней при решении вспомогательной задачи. Проблема инициализации алгоритмов. Два способа ее решения путем перехода к расширенным задачам специального вида. Алгоритмы скошенного пути. Процедура уменьшения коэффициента скошенности. Комбинированные алгоритмы.

4. **Решение систем линейных неравенств.** Метод Фурье-Черникова. Метод сведения к задаче линейного программирования с одной дополнительной переменной. Случай интервальных ограничений на переменные. Быстрая идентификация несовместности системы.

5. **Обращение симметричной положительно определенной матрицы.** Метод Гаусса. Метод Халецкого. Метод сопряженных направлений. Техника частичного обновления.

6. **Примеры практического приложения алгоритмов внутренних точек.** Задача поиска допустимых режимов электроэнергетических систем. Задача идентификации состояния электроэнергетических систем.