О ПОЛИТИКЕ, ФУТБОЛЕ, КОЛЛЕКТИВНОМ ВЫБОРЕ И ОДНОПИКОВЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЯХ

Алексей Савватеев, Александр Филатов, Максим Цветков

В жизни мы часто встречаемся с необходимостью коллективного выбора: принять на основе индивидуальных предпочтений единое групповое решение. Встречаются все: и группа школьников, решающая, куда податься – на футбол или на концерт (выбор именно единый: играть в футбол в одиночку проблематично, да и слушать музыку веселее вместе), и умудренные опытом избиратели, выбирающие Президента, решают, по сути, одну задачу. Вопрос, встретятся ли им при этом подводные камни.

Заранее оговоримся, мнением меньшинства пренебрегаем. Если из 20 человек 15 хотят играть в футбол, то организаторы концерта лишатся некоторой доли своей выручки – все пойдут на стадион. Если же хотя бы 11 предпочитают концерт, то все 20 в этот вечер будут слушать музыку. То есть для двух альтернатив работает правило простого большинства.

Но дело в том, что альтернатив, как правило, больше двух: кандидатов в Президенты на последних выборах было четыре, а на предыдущих и того больше, а альтернативой футболу является не только концерт (к слову, тоже вряд ли единственный), но и волейбол, теннис, бридж и картинг. Неудивительно, что поиском наилучшего правила коллективного выбора занимались многие ученые. И не потому ли избирательные системы подчас весьма экзотические? Ведь второй тур и даже система выборщиков в США, при которой в 2000 году победил Буш, за которого проголосовало меньше избирателей, чем за Гора, – еще не самые странные варианты.

История вопроса восходит ко времени Французской революции. В пылу революционного энтузиазма просвещенные умы верили, что существует универсальный механизм, позволяющий на основе любого набора индивидуальных предпочтений построить идеальное коллективное предпочтение. В частности, две альтернативные системы голосования были выдвинуты французскими математиками Кондорсе и де Борда. Жан-Антуан Кондорсе в 1785 году предложил для определения истинной воли большинства следующий алгоритм. Каждый голосующий должен проранжировать всех кандидатов в порядке убывания предпочтений. После этого для выбранной пары кандидатов определяется, сколько голосующих предпочитает одного кандидата другому. Таким образом, можно сравнить любых кандидатов.

Рассмотрим следующий пример: депутаты законодательного собрания решают вопрос о финансировании строительства автострады (A), велотрека (B), стадиона (C) и диско-клуба (D), но денег хватает только на единственное благо. Пусть из 21 депутата трое считают что автострада лучше велотрека, велотрек лучше стадиона, а худшим проектом является диско-клуб. Математически это выражение запишется как $A \succ B \succ C \succ D$. *Аналогично, предпочтения пятерых выглядят* $A \succ C \succ B \succ D$, *семерых – $B \succ D \succ C \succ A$ и шестерых – $C \succ B \succ D \succ A$. Компактная запись этой информации представлена на рис.1.*

3	5	7	6
A	A	B	C
B	C	D	B
C	B	C	D
D	D	A	A

Рис. 1

Проанализировав ситуацию, мы приходим к выводу, что будет построен стадион. Действительно, 13 депутатов против 8 считают, что стадион лучше автострады, 11 против 10 – что стадион лучше велотрека и, наконец, 14 против 7 – что стадион лучше диско-клуба. Решение принято большинством голосов?

Нет. Сторонники велотрека могут справедливо заметить, что на первом месте тот появляется чаще, чем стадион (7 против 6), на втором – тоже (9 против 5). Ну и ни разу велотрек не оказывается последним. Наиболее логично финансирование его строительства.

Собственно, подобный способ рейтингового голосования был предложен еще в 1781 году Жаном-Шарлем Борда. По его мнению, необходимо ввести следующую балльную систему: наихудшая альтернатива не получает баллов вообще, предпоследняя – один балл, третья с конца – два балла и т.д. При этом победителем по Борда становится альтернатива с максимальной (по всем избирателям) суммой баллов.

Следует заметить, что сторонники автострады также могут обосновать свою победу. Автостраду на первое место поставили 8 депутатов против 7 у велотрека и 6 у стадиона, так что по принятому на данный момент для большинства избирательных кампаний правилу относительного большинства финансируется автострада, несмотря на то, что 13 депутатов из 21 ставят ее на последнее место.

Таким образом, не удается получить однозначный ответ. Кондорсе и Борда долго дискутировали относительно лучшего метода выявления победителя. Главной претензией к методу Кондорсе является то, что победителя может вообще не существовать. Например, для трех депутатов с профилями $A \succ B \succ C$, $B \succ C \succ A$ и $C \succ A \succ B$ (рис. 2.) мы получим, что автостраду предпочитают велотреку двое из троих (т.е. большинство). В свою очередь, для двоих велотрек лучше стадиона. Однако это вовсе не означает финансирование автострады, поскольку по-прежнему двое из трех депутатов голосуют за стадион против автострады. Круг замкнулся.

A	C	B
B	A	C
C	B	A

Рис. 2

Подобный цикл может возникнуть и в отдельно взятой голове. Пусть «шизофреническая невеста» ищет амбициозного (A), верного (B) и симпатичного (C) мужа. При этом первый жених очень амбициозный, среднестатистический в плане верности, но весьма некрасив; второй – очень верный, средний в плане красоты, но полная размазня; третий – крайне симпатичен, средний в плане амбициозности, но изменяет направо и налево (рис.3).

	1	2	3
A	+	–	0
B	0	+	–
C	–	0	+

Рис. 3

Невеста справедливо считает, что $2 \succ 1$, поскольку второй жених более верный и симпатичный, чем первый. В то же время, $3 \succ 2$, поскольку третий амбициознее и симпатичнее второго. Однако $1 \succ 3$, т.к. первый амбициознее и вернее третьего. И так до бесконечности.

Ответом на циклы Кондорсе явились вариации Копленда и Симпсона, позволяющие осуществить выбор в ситуации отсутствия победителя. Победителем по Копленду считается кандидат, одержавший максимальное число побед в парных поединках (так часто определяют победителя в спортивных соревнованиях). При этом вовсе необязательно побеждать всех. Победитель по Симпсону – кандидат, никому не проигравший сильно. Максимизируется наименьшее число избирателей, голосующих за данного кандидата при парном сравнении с другими. Однако вариации Копленда и Симпсона часто дают различные результаты. В частности, в одной и той же ситуации победитель по Копленду может оказаться худшим по Симпсону и наоборот. Приведем пример.

Пусть компания из 9 человек решает, где совместно провести отдых на море. Они сравнивают варианты Анталья (A), Владивосток (B), Сочи (C), Дубай (D) и Евпатория (E). Первый считает, что $A \succ B \succ C \succ D \succ E$, *у остальных другие мнения (рис.4).*

1	4	1	3
A	*C*	*E*	*E*
B	*D*	*A*	*A*
C	*B*	*D*	*B*
D	*E*	*B*	*D*
E	*A*	*C*	*C*

Рис. 4

Удобно построить так называемый «мажоритарный турнир» – таблицу, в каждой клетке которой указано число людей, предпочитающих вариант, стоящий в строке, варианту, стоящему в соответствующем столбце (рис.5). Например, пятеро считают, что Анталья лучше Владивостока. Поэтому в строке *A* и столбце *B* стоит значение 5, и т.д.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A		5	5	5	1
B	4		5	4	5
C	4	4		5	5
D	4	5	4		5
E	8	4	4	4	

Рис. 5

В данной ситуации победитель по Кондорсе отсутствует: все города проигрывают кому-то при парном сравнении. В то же время лучше остальных выглядит Анталья, проигрывающая только Евпатории. Она и становится победителем по Копленду.

Однако одновременно можно заметить, что Анталья не просто проигрывает Евпатории, а проигрывает очень сильно: 8 из 9 человек считает, что Евпатория лучше Антальи. В соответствии с вариацией Симпсона Анталья является худшим городом, а остальные примерно одинаковы, поскольку худшее поражение в парной игре составляет для них 4:5. Результат диаметрально противоположный.

Может проблему коллективного выбора разрешит правило Борда? Будем давать городу 4 балла за первое место, 3 – за второе, 2 – за третье, 1 – за четвертое и 0 – за пятое. Подсчитаем сумму для каждого города. Анталья 1 раз попадает на первое место, 4 раза на второе и 4 раза на последнее, и получает 1*4+4*3=16 баллов. Владивосток получает 1*3+7*2+1*1=18 баллов. Сочи 4*4+1*2=18 баллов. Дубай 4*3+1*2+4*1=18 баллов. Евпатория 4*4+4*1= =20 баллов, что делает ее лучшим вариантом.

Однако если предположить другую шкалу, можно вывести в лидеры любой из городов. Если за второе место вместо 3 давать 3,9 балла, то победителем становится Дубай (*A*=19,6; *B*=18,9; *C*=18; ***D*=21,6**; *E*=20). Если за последнее место все-таки давать хотя бы 0,9 балла, то лучшим городом отдыха становится Сочи (*A*=19,6; *B*=18; ***C*=21,6**; *D*=18; *E*=20,9). При увеличении числа баллов за третье место с 2 до 2,9 получим победу Владивостока (*A*=16; ***B*=24,3**; *C*=18,9; *D*=18,9; *E*=20). И наконец, если за первое и второе места давать соответственно 9 и 8 баллов, компания поедет в Анталью (***A*=41**; *B*=23; *C*=38; *D*=38; *E*=40).

Еще один удивительный факт: есть примеры, когда существующий (!) победитель по Кондорсе (который лучше всех остальных альтернатив!) не может быть выбранным ни при каком методе подсчета очков. Рассмотрим следующий пример:

Крупный инвестор предполагает вложить крупную сумму денег в одну из отраслей экономики: автомобилестроение (A), военно-промышленный комплекс (B) или строительство (C), прислушиваясь при этом к мнению 17 экспертов. Их мнения таковы: шестеро считают, что $A \succ B \succ C$*, четверо, что* $B \succ C \succ A$*, четверо, что* $B \succ A \succ C$*, и трое, что* $C \succ A \succ B$.

Легко заметить, что *A* здесь будет победителем по Кондорсе. Действительно, 9 экспертов против 8 считают, что автопром лучше ВПК, а 10 против 7 – что автопром лучше строительства. Однако попробуем применить рейтинговую систему с произвольными баллами $s_2 \ge s_1 \ge s_0$, $s_2 > s_0$, которые даются соответственно за первое, второе и третье места в списке. Получим, что автомобилестроение 6 раз оказывается на первом месте, 7 раз – на втором, 4 раза – на последнем, и получает рейтинг $6s_2 + 7s_1 + 4s_0$. При этом ВПК 8 раз оказывается первым, 6 раз – вторым и 3 раза – третьим с рейтингом $8s_2 + 6s_1 + 3s_0$. Поскольку выполняется неравенство

$$\left(8s_2 + 6s_1 + 3s_0\right) - \left(6s_2 + 7s_1 + 4s_0\right) = 2s_2 - s_1 - s_0 > 0,$$

при любой рейтинговой системе военно-промышленный комплекс выигрывает у автомобилестроения, являющегося победителем по Кондорсе. Победитель по Кондорсе не будет выбран ни при какой очковой шкале!

Ну и чтобы окончательно закрыть вопрос об идеальном механизме коллективного выбора, изучим такие явления, как манипулируемость и стратегическое голосование.

Допустим, три человека пытаются выявить лучшую группу среди следующего списка: «Аквариум» (A), Високосный год» (B), «Сплин» (C), «Деградация» (D) и «Ерундистика» (E). Их предпочтения имеют вид $A \succ B \succ C$, $B \succ C \succ A$ *и* $C \succ A \succ B$ *соответственно.*

Каждый из голосующих считает последние две группы заведомо худшими, однако не воспринимает их как серьезных конкурентов. И ведет стратегическое голосование, ставя главных соперников на последние места с целью победы любимой группы: $A \succ D \succ E \succ B \succ C$, $B \succ D \succ E \succ C \succ A$ и $C \succ D \succ E \succ A \succ B$. Отыщем победителя по правилу Борда:

$R(A) = 4 + 0 + 1 = 5$, $R(B) = 1 + 4 + 0 = 5$, $R(C) = 0 + 1 + 4 = 5$,

$R(D) = 3 + 3 + 3 = 9$, $R(E) = 2 + 2 + 2 = 6$.

В итоге получили результат $D \succ E \succ A \sim B \sim C$, совершенно не соответствующий реальным предпочтениям. Две худшие команды заняли первые места из-за попытки каждого из голосующих победить любой ценой.

А есть ли какое-нибудь неманипулируемое правило, позволяющее сравнить любые две альтернативы вне контекста знания о расположении остальных кандидатов? Ответ положительный, но не очень обнадеживающий. Такое правило есть и называется «правилом диктатора» – коллективный выбор полностью совпадает с выбором некоторого избирателя. Для совершения выбора, как доказал Нобелевский лауреат Кеннет Эрроу, нужен тот самый король, которого казнили во время Французской революции [1].

Неужели все настолько беспросветно? Оказывается, есть такой вид предпочтений, для которого проблема коллективного выбора является разрешимой. Это однопиковые предпочтения. Если альтернативы можно упорядочить так, что полезность каждого избирателя сначала монотонно возрастает до некоторого уровня, а затем монотонно убывает, то при голосовании побеждает альтернатива, поддержанная медианным избирателем.

Приведем пример: в комнате присутствует 5 человек, для которых идеальная комнатная температура составляет 16, 19, 22, 25 и 28 градусов Цельсия соответственно (рис.6). Каждый хочет открыть окно ровно в той степени, чтобы получить желаемое. При этом отклонение температуры от идеальной в любую сторону уменьшает комфортность нахождения в комнате.

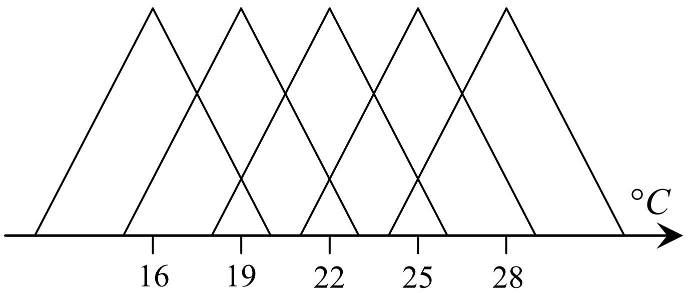

Рис. 6

Что будет, если поставить на голосование альтернативы 25 и 27 градусов? Четверо выскажутся за 25, как меньшее из зол. Однако предложение открыть окошко сильнее и снизить температуру до 23°C пройдет с перевесом 3:2. Продолжая рассуждать подобным образом, получим, что альтернатива 22°C побеждает все остальные при любом парном сравнении. Действительно, все «моржи» поддержат 22°C в борьбе с более жаркими вариантами, а все «теплолюбивые» – в борьбе с более холодными.

Упорядочение не обязательно должно существовать изначально. В некоторых случаях можно придумать порядок, при котором предпочтения окажутся однопиковыми. Например, все политические партии можно упорядочить в соответствии с их отношением к экономическим свободам. Исследования, выполненные на основе данных опроса ВЦИОМ 2007 года, продемонстрировали следующую последовательность: КПРФ (–1,59), СР (–0,87), ЕР (0,30), ЛДПР (0,69), СПС (1,14). То есть пришедший на выборы сторонник рынка скорее проголосует за кандидата от Справедливой России, нежели за коммуниста, а коммунист за единоросса против кандидата от СПС. Правда, здесь проблема остается из-за многомерности шкалы предпочтений: мнения людей различаются не только по отношению к экономическим свободам, но и касательно политических свобод, религии, экологии и многих других вопросов.

Ну и вернемся к упомянутому в заглавии футболу. Интересный факт состоит в однопиковости предпочтений московских футбольных фанатов: среди трех команд «ЦСКА», Локомотив» и «Спартак» именно «Локомотив» является медианой, т.е. подавляющее большинство фанатов «ЦСКА» в матче «Локомотив»–«Спартак» будут болеть за «Локомотив», равно как и большинство фанатов «Спартака» в матче «Локомотив»–«ЦСКА», что обеспечивает железнодорожникам двойную поддержку трибун.

Это подтверждается и эмпирически. Если взять данные за последние 10 лет (2000–2009), мы увидим, что в турнире трех команд «Локомотив» ни разу не выступил хуже, чем в чемпионате в целом, 4 раза выступил лучше, при этом дважды (в 2005 и 2006), будучи худшим из трех команд в чемпионате, оказался первым в группе:

2000 – «Локомотив» в групповом турнире оказался лучшим, в том числе, обогнал «Спартак», хотя в чемпионате «Спартак» по-прежнему (как и в 90-е годы) – победитель с большим отрывом.

2001–2004, 2008–2009 – «Локомотив» показал одинаковые результаты в чемпионате и в турнире 3 команд.

2005–2006 (!!!) – «Локомотив» лучший в групповом турнире, хотя худший в чемпионате.

2007 – «Локомотив» существенно хуже соперников в чемпионате, но второй в группе с большим опережением «Спартака» и рядом с 1 местом «ЦСКА».

Литература:

1. В.Пахомов «Демократия с точки зрения математики» // «Квант», 1992, №10, с.2–6.