

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
Муниципальное общеобразовательное учреждение  
Лицей ИГУ г. Иркутска**

***Математика для экономистов***  
**Факультативный курс (11 класс, 34/68 часов)**

**Авторская комбинаторная  
двухуровневая учебная программа  
для учителей экономики**

**Составители:**

**Филатов Александр Юрьевич,**  
заведующий кафедрой  
математической экономики ИГУ,  
доцент, к.ф.-м.н.

**Пержабинский Сергей Михайлович**  
учитель экономики, аспирант ИГУ

**Иркутск – 2011**

## Пояснительная записка

Программа факультативного курса «Математика для экономистов» рассчитана на учащихся 11-го экономико-математического класса Лицея ИГУ и дополняет основной курс «Экономика. Часть 2. Макроэкономика».

Специфика экономико-математического класса Лицея ИГУ заключается в следующем:

1. В наличии у учащихся математической подготовки в рамках школьной программы за 1–11 классы.
2. В наличии у учащихся базовых экономических знаний в соответствии с курсами «Экономика. Часть 1. Микроэкономика» (10 класс) и «Экономика. Часть 2. Макроэкономика» (11 класс).
3. В наличии у учащихся финансовой грамотности, знания основ предпринимательства и организации собственного дела, представлений об институциональной экономике и теории принятия решений, полученных в рамках факультативного курса «Экономика: вопросы и ответы, модели и задачи» (10 класс).
4. В обладании учащимися опытом научно-исследовательской работы, выступлении на ежегодной научно-практической конференции Лицея ИГУ и защите курсовой работы в рамках научно-методической кафедры.
5. В умении учащихся применять информационные и компьютерные технологии.

В рамках предлагаемого факультативного курса изучаются темы, позволяющие сформировать базу для дальнейшего изучения в вузе продвинутых курсов экономики на современном мировом уровне и не входящие в основные курсы «Экономика. Часть 1. Микроэкономика» (10 класс) и «Экономика. Часть 2. Макроэкономика» (11 класс), а также в факультативный курс «Экономика: вопросы и ответы, модели и задачи» (10 класс).

Курс отвечает требованиям, предъявляемым к факультативным курсам, а также специфике экономического класса Лицея ИГУ. Данный курс также может использоваться учителями-предметниками общеобразовательных учебных заведений при проведении дополнительных занятий по математике и экономике с учетом уровня обученности учащихся и учебной нагрузки.

### **Основные цели и задачи курса:**

1. Формирование и развитие экономико-математического мышления учащихся.
2. Развитие общей экономико-математической культуры.
3. Формирование у учащихся интереса к математике и экономике посредством включения в курс занимательных примеров, задач, парадоксов, игр и экспериментов

4. Формирование у учащихся представления о математическом аппарате, лежащем в основе современных продвинутых курсов экономики.
5. Развитие потребностей и отработка навыков самостоятельного поиска, усвоения и применения знаний учащимися.
6. Подготовка к участию в олимпиадах городского, областного и Всероссийского уровней.
7. Подготовка к поступлению в престижные ВУЗы.
8. Овладение знаниями, умениями и навыками, необходимыми для будущей практической деятельности.

Курс состоит из четырех разделов и рассчитан на 34 или 68 часов (1 или 2 часа в неделю соответственно). Тематика при этом остается неизменной. В игровой форме с большим количеством занимательных примеров, задач, парадоксов и экспериментов, призванных заинтересовать учащихся, даются математические основы современной теоретической экономики.

Первые 10–15 минут факультатива предполагается уделять ответам на вопросы, возникшие у учащихся при прослушивании основного курса экономики, а также вне контекста изучаемого материала, но относящиеся к экономической сфере. Кроме того рекомендуется еженедельно обсуждать прошедшие в экономической жизни региона страны и мира события, давать им оценку и анализировать их возможные последствия.

В случае выбора рекомендуемого 68-часового варианта курса возникает возможность более глубоко проработать изучаемый материал, уделять больше времени деталям, увеличить число экспериментов и деловых игр, решать задачи, в том числе, повышенной трудности, с помощью которых удастся достичь более прочных знаний, чем из чисто теоретических курсов.

Не рекомендуется учебников по факультативному курсу в связи с отсутствием таковых. По отдельным темам курса (в частности, из раздела «теории игр») рекомендуется адаптировать материал вузовских учебников, упрощая его и расширяя занимательными примерами и задачами, по другим – использовать статейный материал, а также интернет-источники, поиск которых можно осуществлять по ключевым словам, присутствующим в содержании разделов программы. Основным источником для учащихся является ведущийся ими качественный конспект занятий.

Программа, а также все сопроводительные материалы, авторские сборники задач и презентации по некоторым разделам курса выложены на интернет-ресурсах <http://math.isu.ru/filatov> и [http://polnolunie.baikal.ru/me/mat\\_ec.htm](http://polnolunie.baikal.ru/me/mat_ec.htm).

#### **Связь с авторами:**

**Филатов Александр Юрьевич:**

Тел. 8-914-88-21-888; e-mail: [alexander.filatov@gmail.com](mailto:alexander.filatov@gmail.com);

ICQ: 10793366; блог: [http://fial\\_livejournal.com](http://fial_livejournal.com)

**Пержабинский Сергей Михайлович:**

Тел. 8-908-661-55-35; e-mail: [sergey\\_per85@mail.ru](mailto:sergey_per85@mail.ru)

## Содержание программы

№	Тема занятия	Часов
<b>0.</b>	<b>Введение</b>	<b>1/2</b>
<b>1.</b>	<b>Теория игр</b>	<b>7/14</b>
1.1.	Введение в теорию игр	1/2
1.2.	Классификация игр	1/2
1.3.	Смешанные стратегии	1/2
1.4.	Решение матричных игр	1/2
1.5.	Динамические игры	1/2
1.6.	Игры с асимметричной информацией	1/2
1.7.	Кооперативная теория игр	1/2
<b>2.</b>	<b>Приложения теории игр к отраслевым рынкам</b>	<b>9/18</b>
2.1.	Количественная олигополия без сговора	1/2
2.2.	Ценовая олигополия без сговора	1/2
2.3.	Олигополия со сговором	1/2
2.4.	Олигополия с барьерами входа	1/2
2.5.	Модели пространственной дифференциации товара	1/2
2.6.	Основы пространственной экономики	1/2
2.7.	Пространственная экономика общественного сектора	1/2
2.8.	Основы теории контрактов	1/2
2.9.	Основы теории аукционов	1/2
<b>3.</b>	<b>Теория оптимизации</b>	<b>6/12</b>
3.1.	Потенциальные игры	1/2
3.2.	Математическое программирование	1/2
3.3.	Решение простейших задач линейного программирования	1/2
3.4.	Многокритериальные задачи	1/2
3.5.	Рекуррентность	1/2
3.6.	Обобщенная концепция устойчивости	1/2
<b>4.</b>	<b>Эконометрика и компьютерное моделирование</b>	<b>10/20</b>
4.1.	Введение в теорию вероятностей и статистику	1/2
4.2.	Вероятностные парадоксы	1/2
4.3.	Метод наименьших квадратов	1/2
4.4.	Анализ временных рядов	1/2
4.5.	Принципы проведения вычислений в Microsoft Excel	1/2
4.6.	Примеры практических эконометрических исследований	1/2
4.7.	Эконофизика	1/2
4.8.	Имитационное моделирование	1/2
4.9.	Экспериментальная экономика	1/2
4.10.	Психологические аспекты экономики	1/2
	<b>Повторение и обобщение материала</b>	<b>1/2</b>

## Учебно-тематическое планирование

№ урока		Тема занятия	Форма урока
34ч	68ч		
1	1–2	Введение	Дискуссия, лекция, диалог
2	3–4	Введение в теорию игр	Лекция, диалог, решение задач, игра
3	5–6	Классификация игр	Разбор игры, лекция, диалог, решение задач
4	7–8	Смешанные стратегии	Лекция, диалог, решение задач, игра, разбор игры
5	9–10	Решение матричных игр	Лекция, диалог, решение задач
6	11–12	Динамические игры	Лекция, диалог, решение задач
7	13–14	Игры с асимметричной информацией	Лекция, диалог, решение задач, игра, разбор игры
8	15–16	Кооперативная теория игр	Лекция, диалог, решение задач, игра, разбор игры
9	17–18	Количественная олигополия без сговора	Дискуссия, лекция, диалог, решение задач
10	19–20	Ценовая олигополия без сговора	Лекция, диалог, решение задач, игра, разбор игры
11	21–22	Олигополия со сговором	Лекция, диалог, решение задач
12	23–24	Олигополия с барьерами входа	Доклады, лекция, диалог, решение задач
13	25–26	Модели пространственной дифференциации товара	Дискуссия, лекция, диалог, решение задач
14	27–28	Основы пространственной экономики	Доклады, лекция, диалог, решение задач
15	29–30	Пространственная экономика общественного сектора	Дискуссия, лекция, диалог, решение задач
16	31–32	Основы теории контрактов	Дискуссия, лекция, диалог, решение задач
17	33–34	Основы теории аукционов	Доклады, лекция, диалог, решение задач, эксперимент

## Учебно-тематическое планирование

№ урока		Тема занятия	Форма урока
34ч	68ч		
18	35–36	Потенциальные игры	Лекция, диалог, решение задач
19	37–38	Математическое программирование	Доклады, лекция, диалог, решение задач
20	39–40	Решение простейших задач линейного программирования	Лекция, диалог, решение задач
21	41–42	Многокритериальные задачи	Доклады, лекция, диалог, решение задач
22	43–44	Рекуррентность	Лекция, диалог, решение задач, игра, разбор игры
23	45–46	Обобщенная концепция устойчивости	Лекция, диалог, решение задач
24	47–48	Введение в теорию вероятностей и статистику	Лекция, диалог, решение задач
25	49–50	Вероятностные парадоксы	Лекция, диалог, эксперимент, дискуссия
26	51–52	Метод наименьших квадратов	Дискуссия, лекция, диалог, практикум
27	53–54	Анализ временных рядов	Лекция, диалог, практикум
28	55–56	Принципы проведения вычислений в Microsoft Excel	Лекция, диалог, практикум
29	57–58	Примеры практических эконометрических исследований	Доклады, лекция, диалог, дискуссия
30	59–60	Эконофизика	Доклады, лекция, диалог, дискуссия
31	61–62	Имитационное моделирование	Доклады, лекция, диалог, дискуссия
32	63–64	Экспериментальная экономика	Лекция, диалог, эксперименты и их разбор
33	65–66	Психологические аспекты экономики	Лекция, диалог, эксперименты и их разбор
34	67–68	Повторение и обобщение материала	Дискуссия, лекция, диалог

## Содержание разделов программы

### 0. ВВЕДЕНИЕ

1. Отличия естественных и гуманитарных наук.
2. Экономический империализм и общий социальный анализ.
3. Математика как инструментарий современной экономики.
4. Универсализм vs разнообразие.
5. Концептуализм vs эмпиризм.
6. Теория игр vs оптимизация.
7. Краткосрочный vs долгосрочный период.

### 1. ТЕОРИЯ ИГР

#### 1.1. Введение в теорию игр

1. Множества игроков и их стратегий.
2. Доминирующая стратегия.
3. «Дилемма заключенного» и ее экономическая интерпретация.
4. Равновесие Нэша.
5. Пример «джинн и тоник».
6. Игра «минимальное число».

#### 1.2. Классификация игр

1. Поиск равновесий Нэша в игре «минимальное число».
2. «Дилемма заключенного».
3. «Семейный спор».
4. «Нерегулируемый перекресток».
5. «Орел-решка».

#### 1.3. Смешанные стратегии

1. Отсутствие равновесия в чистых стратегиях.
2. Пример «Пионеры и водка».
3. Равновесие в смешанных стратегиях.
4. Игра «Тюремное очко» и ее разбор.

#### 1.4. Решение матричных игр

1. Решение в чистых стратегиях.
2. Графический способ решения матричных игр  $2 \times n$  и  $m \times 2$ .

#### 1.5. Динамические игры

1. Бесконечно повторяющееся взаимодействие.
2. Проблема таксиста и продажи в долг.
3. Пример «опера Пуччини».
4. Пример «террорист».
5. Дуэли  $n$  лиц и получаемые в них равновесия.
6. Экономические примеры.

#### 1.6. Игры с асимметричной информацией

1. Пример «встреча в метро».
2. Рынок «лимонов».
3. Модели последовательного поиска Стиглера.

### **1.7. Кооперативная теория игр**

1. Требования к механизму.
2. Индивидуальная рациональность.
3. Коалиционная устойчивость.
4. Пример «аэропорт».
5. Пример «дорога».
6. Вектор Шепли.

## **2. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР**

### **2.1. Количественная олигополия без сговора**

1. Модель Курно.
2. Модель Штакельберга – равновесие в двухуровневой игре.
3. Борьба за лидерство.

### **2.2. Ценовая олигополия без сговора**

1. Ценовая война.
2. Парадокс Бертрана и выходы из него.
3. Динамическая ценовая конкуренция.
4. Модель Эджворта.
5. Возрастающие предельные издержки.
6. Дифференциация товара.

### **2.3. Олигополия со сговором**

1. Ценовые лидеры: доминирующая фирма, фирма с наименьшими издержками, барометрический лидер.
2. Объединение фирм. Картель.
3. Квоты и задача их определения.
4. Картель с побочными платежами.
5. Устойчивость картеля.
6. Картель и конкурентное окружение.

### **2.4. Олигополия с барьерами входа**

1. Понятие барьера входа.
2. Блокированный, сдерживаемый и предоставляемый вход.
3. Абсолютные и относительные преимущества в издержках.
4. Модель Джелмана-Сэлопа.
5. Модель Спенса.
6. Грабительское ценообразование.

### **2.5. Модели пространственной дифференциации товара**

1. Пример «мороженое на пляже».
2. Модели линейного города Хотеллинга.
3. Случай фиксированных цен.
4. Случай фиксированного размещения фирм.
5. Обобщения и выводы.

### **2.6. Основы пространственной экономики**

1. Закон Зипфа.
2. Учет неоднородности пространства.

3. Классические модели международной торговли.
4. Идеология и выводы из модели монополистической конкуренции Диксита-Стиглица-Кругмана.

### **2.7. Пространственная экономика общественного сектора**

1. Проблемы размещения общественных благ: количество, расположение, распределение людей, оплата.
2. Миграционная и коалиционная устойчивость.
3. Случаи прямой и плоскости.

### **2.8. Основы теории контрактов**

1. Принципал и агент.
2. Асимметрия информации.
3. Отрицательный отбор.
4. Моральный риск.
5. Рыночные сигналы.
6. Фильтрация.
7. Пример формирования страхового тарифа.
8. Пример найма на работу.

### **2.9. Основы теории аукционов**

1. Понятие аукциона, их классификация и ожидаемые результаты.
2. Английский и голландский аукционы.
3. Открытый и закрытый аукционы.
4. Аукционы первой и второй цены.
5. Аукционы с оплатой победителя и всеобщей оплатой.
6. Аукцион Викри.
7. Проклятие победителя.
8. Практика аукционов.

## **3. ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ**

### **3.1. Потенциальные игры**

1. Связь задач теории игр и оптимизации.
2. Виды потенциальных игр: точные, взвешенные, порядковые и потенциальные игры наилучшего ответа.
3. Связь с моделью массового обслуживания Розенталя.

### **3.2. Математическое программирование**

1. Целевая функция и ограничения.
2. Примеры из различных областей экономики.
3. Задачи потребителя и производителя.
4. Модель межотраслевого баланса.

### **3.3. Решение простейших задач линейного программирования**

1. Допустимость и оптимальность.
2. Графический метод решения задач ЛП.
3. Симплекс-метод.

### **3.4. Многокритериальные задачи**

1. Принципы решения многокритериальных задач.

2. Линейная, максиминная и другие свертки.
3. Условная оптимизация.
4. Принципы идеальной точки и Калаи-Смородинского.
5. Приложение к различным областям экономики.

### **3.5. Рекуррентность**

1. Игра в камни.
2. Выигрышные и проигрышные стратегии.
3. Игра «ним».
4. Пешечная дуэль.
5. Внешняя и внутренняя устойчивость.

### **3.6. Обобщенная концепция устойчивости**

1. Пример «пауки в банке».
2. Модель удержания плохих правительств.
3. Парето-оптимальность в оптимизации.
4. Равновесие Нэша в некооперативных играх.
5. Ядро в кооперативных играх.
6. Объединение в рамках единой концепции устойчивости.

## **4. ЭКОНОМЕТРИКА И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

### **4.1. Введение в теорию вероятностей и статистику**

1. Понятие случайной величины.
2. Математическое ожидание и дисперсия.
3. Корреляция.
4. Пример «прекрасная невеста».
5. Игра «ключевые карты».

### **4.2. Вероятностные парадоксы**

1. «Парадокс Монти Холла».
2. Парадокс «двух конвертов».
3. Парадокс «обмена валют».
4. «Ленинградский парадокс».

### **4.3. Метод наименьших квадратов**

1. Исходные данные и результаты эконометрического исследования.
2. Парная линейная связь.
3. Графическое представление метода наименьших квадратов.
4. Случай нескольких регрессоров.
5. Простейшие нелинейные модели.

### **4.4. Временные ряды**

1. Отличия временных и пространственных выборок.
2. Тренд.
3. Учет сезонных колебаний.
4. Скользящее среднее.
5. Дамми-переменные.

### **4.5. Принципы проведения вычислений в Microsoft Excel**

1. Основные команды Microsoft Excel, использующиеся в эконометрике.

2. Оценивание функции спроса с помощью линейной регрессии.
3. Выделение тренда и сезонности временного ряда.

#### **4.6. Примеры эконометрических исследований**

1. Инфляция и экономический рост.
2. Конвергенция ВВП между странами.
3. Паритет покупательной способности.
4. Валютный курс и процентная ставка.

#### **4.7. Эконофизика**

1. История появления.
2. Отличия от мейнстрима.
3. Приложения к финансовым рынкам, распределению богатства, макроэкономике и финансам, другим областям.

#### **4.8. Имитационное моделирование**

1. Интуитивные ловушки.
2. Модель «Мировая динамика» Дж.Форрестера.
3. Модель прогнозирования инфляции.

#### **4.9. Экспериментальная экономика**

1. История появления.
2. Экспериментальная экономика: примеры.
3. Доверие и его влияние на стратегическое взаимодействие.
4. Влияние наказания и страховки на поведение агентов.
5. «Эксперимент на доверие».

#### **4.10. Психологические аспекты экономики**

1. Психологическая экономика: несколько примеров.
2. Рыночные сигналы.
3. Асимметрия информации.
4. Закон малых чисел.
5. Тайминг.
6. Отвращение к потерям.

### **ПОВТОРЕНИЕ И ОБОБЩЕНИЕ МАТЕРИАЛА**

1. Теория игр.
2. Приложения теории игр.
3. Теория оптимизации.
4. Эконометрика и компьютерное моделирование.

## Рекомендуемые интернет-источники:

### 1. Органы государственной власти:

<http://www.government.ru> – Правительство РФ

<http://www.minfin.ru> – Министерство финансов РФ

<http://www.economy.gov.ru> – Министерство экономического развития РФ

<http://www.cbr.ru> – Центральный банк РФ

<http://www.nalog.ru> – Федеральная налоговая служба РФ

<http://www.gks.ru> – Федеральная служба государственной статистики РФ

<http://www.eeg.ru> – Экспертная экономическая группа

<http://www.forecast.ru> – Центр макроэкономического анализа и краткосрочного прогнозирования

### 2. Экономическое образование и наука:

<http://www.nes.ru> – Российская экономическая школа. Ведущая магистратура по экономике и финансам в России и Восточной Европе в целом

<http://hse.ru> – Высшая школа экономики. Ведущий экономический вуз в России

<http://econorus.org> – Новая экономическая ассоциация, объединение действующих российских экономистов

<http://iloveeconomics.ru> – портал «экономика для школьников»

<http://economicus.ru> – портал «Экономическая школа»: обучающая литература

<http://math.isu.ru/ru/filatov> – дополнительные материалы и подборки задач

### СМИ:

<http://rbc.ru> – информационное агентство «РосБизнесКонсалтинг»

<http://export.rbc.ru> – данные по курсам валют и фондовым индексам

<http://finam.ru> – рынок ценных бумаг: информация и аналитика

<http://www.vedomosti.ru> – газета «Ведомости»

<http://www.smoney.ru> – аналитический еженедельник «Smart Money»

<http://www.expert.ru> – журнал «Эксперт»

### 3. Экономические блоги:

<http://slon.ru> – Российский экономический портал: новости и блоги

<http://flime.ru> – красочно и понятно об экономических явлениях

<http://kar-barabas.livejournal.com> – ежедневный экономический обзор

<http://av-rybin.livejournal.com> – «хроника кризиса», переводы статей

<http://likh.livejournal.com> – аналитические материалы

<http://ugfx.livejournal.com> – актуальная экономическая статистика

<http://ksonin.livejournal.com> – профессор РЭШ, экономист и журналист

<http://superinvestor.ru> – все о фондовом рынке

<http://rusanalit.livejournal.com> – нефтяной рынок, российская экономика

<http://fritzmorgen.livejournal.com> – экономика, ведение бизнеса, логика

## Пример факультатива 2.3 (урок 10 / 19–20) «Ценовая олигополия без сговора»:

*Примечание 1.* Серым фоном выделены фрагменты материала, исключаемые для сокращенной программы, рассчитанной на 34 часа.

*Примечание 2.* Факультатив начинается с ответов на вопросы учащихся и обсуждения экономических событий прошедшей недели.

*Примечание 3.* При проведении факультатива можно использовать слайды презентации [http://math.isu.ru/ru/chairs/me/files/filatov/2009\\_-\\_oligopoly1.ppt](http://math.isu.ru/ru/chairs/me/files/filatov/2009_-_oligopoly1.ppt)

**Цели факультатива:** изучить особенности некооперативного взаимодействия олигополистов на рынке, разобраться в модели ценовой войны Бертрана, изучить способы выхода из парадокса Бертрана.

**Олигополия без сговора** – рыночная структура, в которых каждая фирма, ориентируясь на действия конкурентов, самостоятельно максимизирует прибыль, управляя собственной ценой и объемом поставок продукции.

**Ценовая олигополия** – олигополия, в которой стратегической переменной является цена. Адекватна в ситуации, когда фирмы в состоянии за небольшое время существенно изменить объем поставок на рынок, в том числе, при возможности, завоевать весь рынок.

**Примеры:** розничная торговля, большинство рынков услуг, некоторые рынки потребительских товаров.

**Дилемма заключенного:**

	<b>не созн.</b>	<b>созн.</b>		<b>дорого</b>	<b>дешево</b>
<b>не созн.</b>	15 сут./15сут.	10 лет / 0	<b>дорого</b>	5 млн. /5 млн.	0 / 6 млн.
<b>созн.</b>	0 / 10 лет	5 лет / 5 лет	<b>дешево</b>	6 млн./ 0	2 млн. / 2 млн.

**Модель ценовой войны Бертрана:**

$$q_1 = \begin{cases} Q, & p_1 < p_2 & \text{- захват рынка} \\ Q/2, & p_1 = p_2 & \text{- дележ рынка} \\ 0, & p_1 > p_2 & \text{- потеря рынка} \end{cases} \Rightarrow \text{выгодно поочередное снижение цен.}$$

**Оптимальная стратегия:** удешевление продукции с целью захвата всего рынка при любых ценах конкурентов, превышающих себестоимость.

При  $c_1 = c_2 = c$  существует **единственное равновесие**  $p_1^* = p_2^* = c$ .

**Парадокс Бертрана:**

Равновесие на рынке с небольшим количеством фирм достигается при продаже продукции по издержкам. Фирмы не в состоянии обеспечить себе положительную прибыль, производя однородную продукцию.

**Выходы из парадокса Бертрана:**

1. Динамическая ценовая конкуренция.
2. Модель Эджворта (ограничения на производственные мощности).
3. Модели с возрастающими предельными издержками.
4. Модели с дифференцированным продуктом.

## Динамическая ценовая конкуренция

Если взаимодействие фирм может продолжаться бесконечно долго, доминирующими могут быть, по крайней мере, следующие две стратегии:

**Стратегия «Око за око»** – изначально назначить высокую цену, далее повторять действия конкурента.

**Стратегия «хищничества»** – назначать низкую цену в любой момент времени вне зависимости от действий конкурента.

**Пример.** На рынке действуют два олигополиста, которые могут сотрудничать или действовать исходя из собственных интересов. Соответствующие годовые прибыли (в млн. руб.) в зависимости от выбранных стратегий приведены в следующей таблице:

фирма 1 \ фирма 2	сотрудничество	собственные интересы
сотрудничество	$(\pi_1 = 140; \pi_1 = 140)$	$(\pi_3 = 0; \pi_2 = 220)$
собственные интересы	$(\pi_2 = 220; \pi_3 = 0)$	$(\pi_4 = 105; \pi_4 = 105)$

Если одна из фирм начинает действовать в собственных интересах, то другая больше не идет на сотрудничество. Определить, какая из стратегий будет оптимальной, если вероятность продолжения взаимодействия на каждый последующий год равна 80%, а дисконтирующий множитель равен 0,9 (рубли, полученный через год, равен сегодняшним 90 копейкам).

**Решение:**

Если мы выбираем стратегию сотрудничества, то в первый год получаем 140 млн.руб., во второй – с вероятностью 80% 140 млн.руб., которые для нас превратятся в  $140 \cdot 0,9 = 126$  млн.руб. и т.д. Если мы предпочитаем действовать в собственных интересах, то в первый год получаем 220 млн.руб., во второй – с вероятностью 80% 105 млн.руб., которые для нас превратятся в  $105 \cdot 0,9 = 94,5$  млн.руб. и т.д. Сравним чистую текущую стоимость для данных двух вариантов:

$$NPV_1 = 140 + 0,8 \cdot 140 \cdot 0,9 + 0,8^2 \cdot 140 \cdot 0,9^2 + \dots = \\ = 140 / (1 - 0,8 \cdot 0,9) = 140 / 0,28 = 500.$$

$$NPV_2 = 220 + 0,8 \cdot 105 \cdot 0,9 + 0,8^2 \cdot 105 \cdot 0,9^2 + \dots = \\ = 220 + 105 \cdot 0,72 / (1 - 0,72) = 490.$$

Таким образом, каждой из фирм выгоднее вести политику сотрудничества, при которой они получают с учетом дисконтирования в среднем по **500 млн.руб.**

### Игра «динамическая ценовая конкуренция»

(пары / тройки игроков выбираются случайно и участникам неизвестны).

Вариант 1. Вероятность продолжения взаимодействия неизвестна.

Вариант 2. Вероятность продолжения взаимодействия задана.

Вариант 3. Число участников взаимодействия увеличивается до трех человек.

**Разбор общего случая:** произвольные прибыли  $\pi_2 > \pi_1 > \pi_4 > \pi_3$ , вероятность продолжения игры  $\rho$ , дисконтирующий множитель  $\delta$ .

**Стратегия «Око за око»:**  $NPV_1 = \pi_1 + \pi_1 \rho \delta + \pi_1 \rho^2 \delta^2 + \dots = \frac{\pi_1}{1 - \rho \delta}$ .

**Стратегия «хищничества»:**  $NPV_2 = \pi_2 + \pi_4 \rho \delta + \pi_4 \rho^2 \delta^2 + \dots = \pi_2 + \pi_4 \frac{\rho \delta}{1 - \rho \delta}$ .

$$NPV_1 > NPV_2 \Leftrightarrow \frac{\pi_1 - \pi_4}{1 - \rho \delta} > \pi_2 - \pi_4 \Leftrightarrow \frac{\pi_2 - \pi_1}{\pi_2 - \pi_4} < \rho \delta.$$

**Фирмы отказываются от ценовой войны, если**

1. Увеличивается вероятность дальнейшего взаимодействия.
2. Если увеличивается значимость будущих прибылей.
3. Одностороннее снижение цены приводит к малому увеличению прибыли, а взаимное снижение цены крайне неприятно для обеих фирм.

**Эмпирические исследования (Р.Аксельрод). Требования к стратегиям:**

**Добрая** – не должна предавать, пока этого не сделает оппонент.

**Мстительная** – не должна быть слепым оптимистом.

**Прощающая** – отомстив, должна вернуться к сотрудничеству.

**Не завистливая** – не должна пытаться выиграть больше оппонента.

**Модель Эджворта (ограничения на производственные мощности)**

$$p = a - bQ, \quad Q = q_1 + q_2, \quad TC_i(q_i) = cq_i, \quad q_1 \leq K_1, \quad q_2 \leq K_2, \quad K_1 \leq K_2 < (a - c)/b.$$

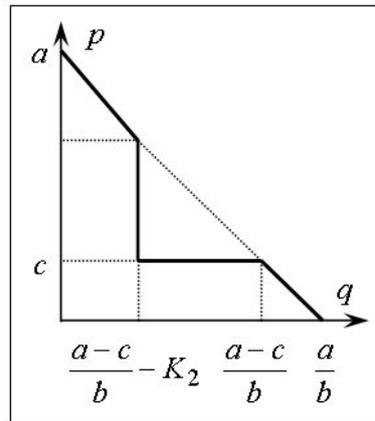
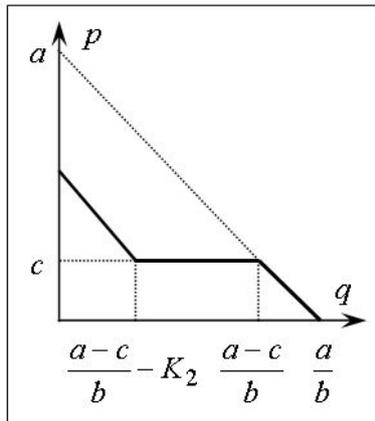
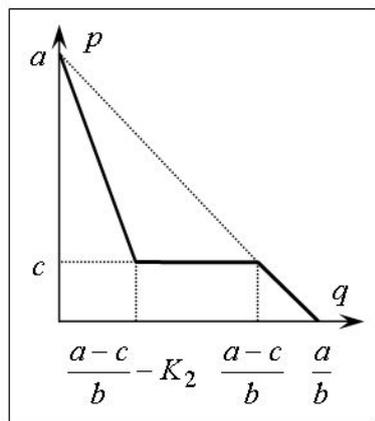
**Продажа продукции по издержкам не является равновесием Нэша!**

**Возможные стратегии поведения:**

1. Установление низкой цены и продажа продукции в объеме  $K_i$ .
2. Установление монопольной цены и работа на остаточном спросе.

$$p_1 = (a + c)/2, \quad p_2 = p_{1-}, \quad p_1 = p_{2-}, \quad \text{ценовая война до уровня } p^*, \quad p_1 = (a + c)/2.$$

**Схемы случайного, эффективного и антиэффективного рационирования:**



**Схема случайного рационирования:**

**Снижение цены и захват рынка:**  $\pi_1^- = (p - c)K_1$

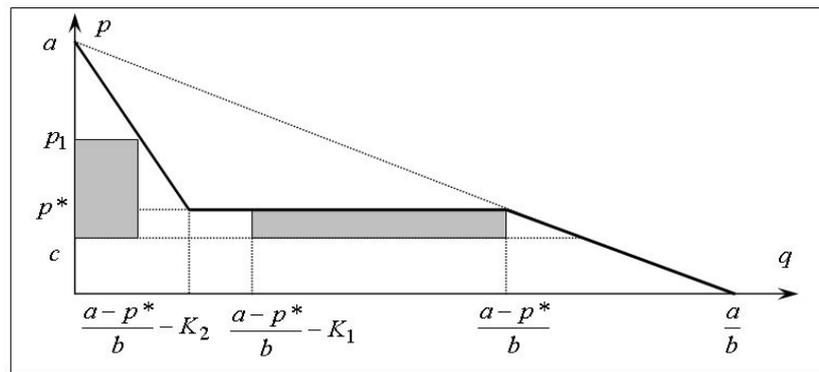
**Повышение цены до монопольного уровня на остаточном спросе:**

$$q_1 = \frac{(a - p)/b - K_2}{(a - p)/b} \frac{a - p_1}{b} = (a - p_1) \left( \frac{1}{b} - \frac{K_2}{a - p} \right), \quad \pi_1^+ = (p_1 - c)q_1 = \frac{(a - c)^2}{4} \left( \frac{1}{b} - \frac{K_2}{a - p} \right).$$

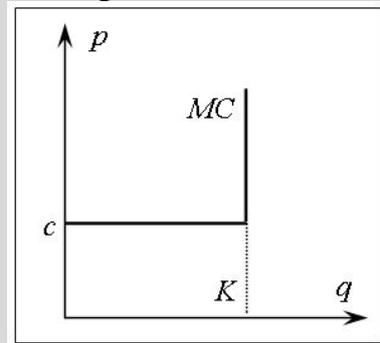
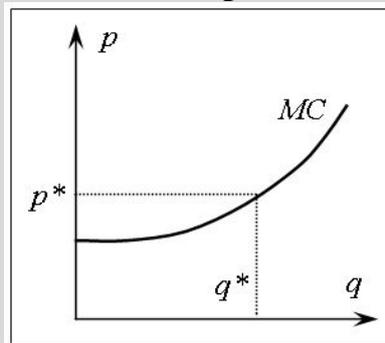
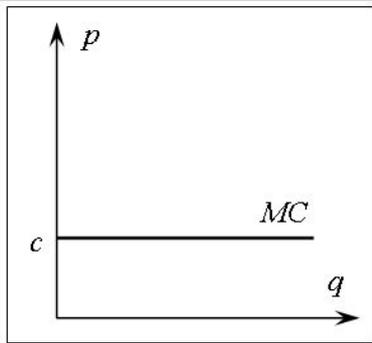
Цена  $p^*$  находится из равенства  $\pi_1^- = \pi_1^+$  и решения квадратного уравнения.

**Замечание 1.** В модели Эджворта нет статического равновесия!

**Замечание 2.** Первой поднимать цену, уходя на остаточный спрос, всегда будет фирма с меньшими производственными мощностями!



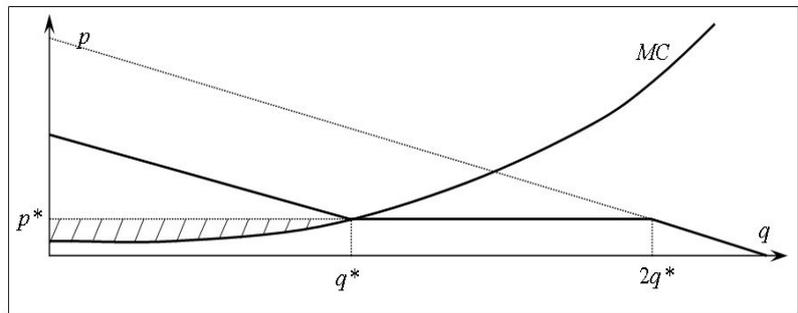
### Модели с возрастающими предельными издержками



Постоянная и убывающая отдача от масштаба, ограничение по мощности

**Обобщение случая совершенной конкуренции не работает!**

$p^* = MC_1(q_1) = \dots = MC_n(q_n)$ ,  
 $q_1 + q_2 + \dots + q_n = q_D(p^*)$   
 – не является равновесием Нэша!



### Модели с дифференцированным продуктом

**Продукты не являются совершенно взаимозаменяемыми!**

1. Транспортные издержки (модели Хотеллинга и Сэлопа).
2. Качество товара, обслуживания и сервиса.

**Простейшая модель:**

$$q_1(p_1, p_2) = a - bp_1 + dp_2, \quad q_2(p_1, p_2) = a - bp_2 + dp_1, \quad 0 < d < b, \quad a > c(b-d).$$

**При малой разнице цен часть клиентов остается у более дорогой фирмы!**

$d < b \Rightarrow$  если цены товаров в обеих фирмах растут на одну и ту же величину, объем спроса в обеих фирмах сокращается.

$a > c(b-d) \Rightarrow$  если обе фирмы назначают цены на уровне предельных издержек, объемы спроса на их товары будут положительными.

$$p_1 = \frac{a + bc + dp_2}{2b}, \quad p_2 = \frac{a + bc + dp_1}{2b}, \quad p_1^* = p_2^* = \frac{a + bc}{2b - d} = c + \frac{a - c(b-d)}{2b - d} > c.$$