Однокритериальные и многокритериальные задачи в управленческой деятельности

1. Задачи однокритериальной оптимизации

Существует значительное число экономических систем, в частности из области управленческой деятельности, моделируя которые мы приходим к различным формам задач оптимизации. Рассмотрим задачу однокритериальной оптимизации. В общей форме она запишется следующим образом:

$$f(\mathbf{x}) \to \max(\min), \ \ \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Т.е. на некотором допустимом множестве $\mathbf{X}$ максимизируется либо минимизируется функция от вектора переменных $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$.

Действительно, практически любая задача управления состоит в оптимизации заданной целевой функции при некоторых “бюджетных ограничениях”. Мы либо максимизируем прибыль (объем производства, функцию полезности, заданную в произвольной форму, или любой прочий эквивалент “счастья”), либо минимизируем затраты (риск при инвестировании, объем перевозок и т.д.). При этом в различных задачах нас ограничивают объем имеющихся денежных средств, объем ресурсов (сырьевых либо каких-то иных) и любые другие соображения. Подобные ограничения обычно записываются в виде равенств и неравенств. Таким образом, получаем следующую формулировку задачи оптимизации

$$f(\mathbf{x}) \to \max,$$
$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \ \ i = 1,\dots,m,$$
$$h_j(\mathbf{x}) \le 0, \ \ j = 1,\dots,k.$$

Очевидно, что задача минимизации может быть превращена в задачу максимизации путем замены функции $f(\mathbf{x})$ на $-f(\mathbf{x})$.

В частном случае, когда все функции $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$ и $h_j(\mathbf{x})$ являются линейными, задача называется задачей линейного программирования.

2. Примеры задач однокритериальной оптимизации

Рассмотрим несколько примеров задач однокритериальной оптимизации.

2.1. Производственная задача.

Пусть некоторое предприятие способно выпускать n видов продукции $(A_1, A_2, \ldots A_n)$. При этом используется m видов ресурсов $(B_1, B_2, \ldots B_m)$, $m < n$. Под ресурсами подразумеваются денежные средства, виды сырья, рабочая сила, производственные мощности, площади, технологии. Прибыль от реализации единицы продукции A_j составляет c_j. Затраты i - ресурса на производство одной единицы j - вида продукции составляет a_{ij} (сколько требуется денег, сырья, человеко-часов рабочей силы, часов работы оборудования и т.д., чтобы произвести единицу продукции). Имеющийся объем i - ресурса равен b_i. Нужно составить такой план производства, при котором мы получим максимальную прибыль.

Пусть производится x_j единиц продукции A_j. Прибыль при этом будет равна

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max. \qquad (1)$$

Суммарные затраты по i- виду ресурса составят $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Зная, каков имеющийся объем ресурса, составим ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \ i = 1, \ldots, m. \qquad (2)$$

И последним видом ограничений будут очевидная неотрицательность объемов производимой продукции

$$x_j \ge 0, \ \ j = 1, \ldots, n. \qquad (3)$$

Мы получили задачу линейного программирования (1)-(3). Наиболее распространенным методом ее решения является симплекс-метод, хотя существует и значительное число других подходов.

2.2. Транспортная задача.

Пусть у нас имеется m пунктов производства однородного продукта: $(A_1, A_2, \ldots A_m)$ и n пунктов его потребления $(B_1, B_2, \ldots B_n)$. В каждом из пунктов A_i производится a_i единиц продукта, а в каждом из пунктов B_j потребляется соответственно b_j единиц. Необходимо составить оптимальный план перевозок (при котором достигается их минимальная суммарная стоимость), если известно, что удельная стоимость перевозки из пункта A_i в пункт B_j составляет c_{ij}.

Составим математическую модель. Пусть x_{ij} - объем продукта, перевозимого из A_i в B_j. Тогда общая стоимость перевозок, которую мы минимизируем, будет равна

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min. \qquad (4)$$

Суммарный объем груза, вывозимого из пункта A_i, составит $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, а он по условию равен a_i. Суммарный объем груза, привозимого в B_j, равный по условию b_j, составит $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$. Получим ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \ i = 1,\dots,m, \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = 1,\dots,n. \qquad (6)$$

Также здесь присутствуют ограничения неотрицательности всех объемов перевозок

$$x_{ij} \ge 0, \ \ i = 1,\dots,m, \ \ j = 1,\dots,n. \qquad (7)$$

Задача (4)-(7) называется транспортной. Начальный допустимый план можно получить методом северо-западного угла. Затем проводится последовательное улучшение плана методом потенциалов.

2.3. Модель оптимизации инвестиционного портфеля.

Пусть в нашем распоряжении имеется некоторая денежная сумма S. Имеются n различных инвестиционных проектов (n эмитентов, работающих на рынке ценных бумаг, в акции которых можно вкладывать средства). Математическое ожидание дохода, полученного при вложении 1 рубля в j- проект, составляет m_j рублей,. Однако доходность, разумеется, не может служить единственной интересующей нас характеристикой: существуют достаточно доходные, но крайне рисковые проекты, очень ярким примером здесь является построенная несколько лет назад пирамида АО “МММ”. С другой стороны, имеются абсолютно (по крайней мере, почти) надежные проекты, которые так же абсолютно надежно не приносят прибыли: можно просто держать деньги наличными (этот выбор можно считать $(n+1)$- проектом), никуда их не вкладывая, при этом мат.ожидание дохода составит $m_{n+1}=1$. Нужно найти компромисс между данными двумя крайностями. За меру рискованности инвестиционного портфеля можно принять его дисперсию (т.е. меру разброса доходности относительно среднего значения).

Итак будем вкладывать в j- проект объем средств x_j. Тогда мат.ожидание полученного дохода, которое и максимизируется, составит

$$M(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n+1} m_j x_j \to \max . \qquad (8)$$

Поскольку мы располагаемым фиксированным объемом средств S, то получим первое ограничение

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_j = S . \qquad (9)$$

Дисперсия портфеля составит $D(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} K_{ij} x_i x_j$. В случае, когда корреляцией между отдельными проектами можно пренебречь, т.е. $K_{ij}=0,\ i\neq j$, дисперсию можно записать в форме $D(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n+1} D_j x_j^2$.

Одним из подходов к формированию оптимального портфеля будет ограничение его дисперсии заданной фиксированной величиной D. В упрощенной форме ограничение запишется в следующем виде:

$$D(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n+1} D_j x_j^2 \le D . \qquad (10)$$

И последним видом ограничений снова будет неотрицательность величин x_j - объемов средств, вкладываемых в j- проект. Хотя существуют модификации модели, в которых это ограничение отсутствует - в них отрицательность x_j означает необходимость не покупки, а продажи акций. Тем не менее, в исходной версии модели оно присутствуют

$$x_j \ge 0,\ \ j=1,\dots,n . \qquad (11)$$

Получили задачу квадратичного программирования (8)-(11).

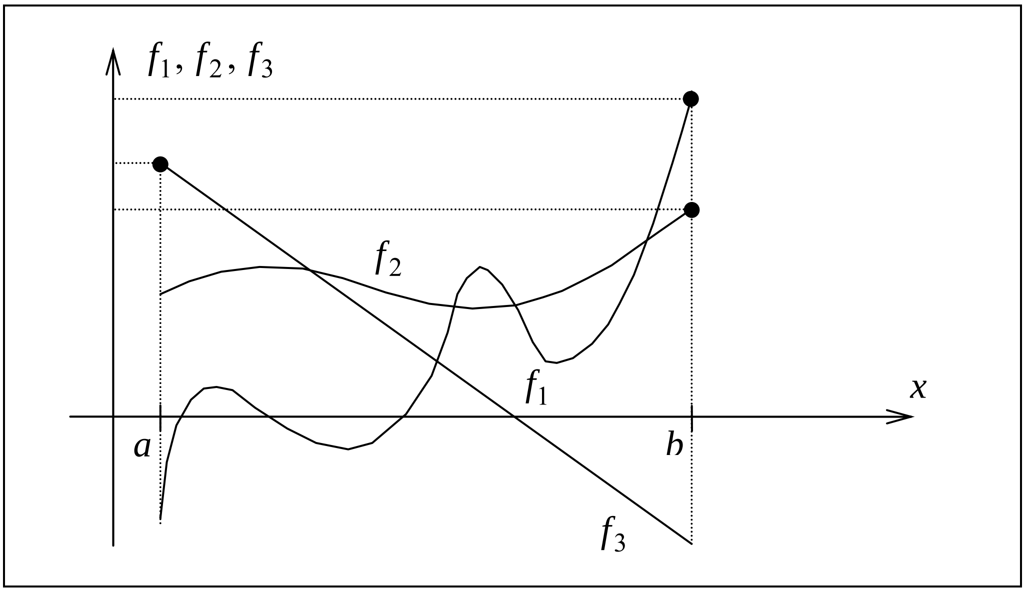
Однако фиксирование верхней границы D для дисперсии (ограничение (10)) и последующее решение задачи однокритериальной оптимизации не является единственно возможным подходом как к задаче выбора оптимального инвестиционного портфеля, так и к любым другим задачам, в которых предполагается оптимизация по нескольким противоречащим друг другу критериям. Мы переходим к рассмотрению более общей задачи: задачи многокритериальной оптимизации.

3. Задачи многокритериальной оптимизации

Пусть у нас имеется несколько целевых функций, которые для упрощения записи нам нужно максимизировать (как уже говорилось, задача на минимум преобразуется заменой знака функции на противоположный). В рассмотренной модели ими являются доходность и “минус-дисперсия”, в других задачах, разумеется, могут возникать любые другие варианты целевых функций. По прежнему имеется набор ограничений, задающих область допустимых значений задачи. Получаем задачу многокритериальной оптимизации, которая в общей форме формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} & f_i(\mathbf{x}) \to \max, \ \ i = 1,\dots,m, \\ & \mathbf{x} \in \mathbf{X}. \end{aligned} \tag{12}$$

Главная возникающая здесь сложность в неоднозначности оптимального решения: в точке, где один из критериев достигает своего максимума, другой может быть очень далек не только от максимума, но и даже от какой-либо приемлемой величины. Продемонстрируем возможную ситуацию на рисунке



Видим, что максимум функций f_1 и f_2 достигается в точке b, однако она же является точкой минимума третьей функции f_3, максимум которой достигается в точке a. Каким образом можно прийти к компромиссу? Существует множество подобных способов. Рассмотрим их поочередно.

4. Сведение многокритериальной задачи к однокритериальной

4.1. Способ 1. Выделение главного критерия (условная максимизация).

Применение данного подхода на модели оптимизации портфеля ценных бумаг привело к рассмотренной выше задаче однокритериальной оптимизации (8)-(11). Его суть достаточно проста: выбирается наиболее важный из всего набора критерий и проводится его оптимизация при условии того, что значения остальных критериев не хуже наперед заданных фиксированных значений, считающихся удовлетворительными.

В рассмотренной модели была выбрана предельная величина риска портфеля, превосходить которую мы не можем, какова бы при этом ни была доходность портфеля.

Формализуем этот подход для задачи (12). Пусть выбран наиболее важный для нас критерий f_1 (перенумеруем критерии так, чтобы самый важный оказался первым). Пусть заданы числа $f_i^{\min}$, $i = 2,\ldots,m$ - удовлетворяющие нас значения соответствующих критериев. Будем решать следующую однокритериальную задачу:

$$f_1(\mathbf{x}) \to \max,$$

$$f_i(\mathbf{x}) \ge f_i^{\min},\ i = 2,\ldots,m,$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Главное в этом подходе избежать двух крайних случаев: когда множество точек $\mathbf{x}$, при которых выполняются все неравенства $f_i(\mathbf{x}) \ge f_i^{\min}$, совпадает с самим множеством $\mathbf{X}$ (тогда непонятно, для чего нужны остальные критерии) и когда подобное пересечение с множеством $\mathbf{X}$ пусто (относясь слишком привередливо к побочным критериям, мы задали такие значения $f_i^{\min}$, при которых не осталось ни одной допустимой точки).

4.2. Способ 2. Линейная свертка.

Наиболее простым и часто используемым способом сведения многокритериальной задачи к однокритериальной является линейная свертка. Задаются весовые неотрицательные коэффициенты c_i, обозначающие степень важности каждого критерия, и максимизируется линейная комбинация целевых функций, т.е. решается задача

$$
\begin{aligned}
& g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(\mathbf{x}), \\
& \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \\
& c_i \geq 0,\ \ i = 1,\dots,m, \quad \sum_{i=1}^{m} c_i = 1.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

В крайнем случае, когда какой-то из коэффициентов $c_j = 1$, а все остальные $c_i = 0,\ \ i \neq j$, мы приходим к однокритериальной задаче максимизации j- целевой функции.

4.3. Способ 3. Максиминная свертка.

В этом способе заранее задаются масштабирующие коэффициенты f_i^0 (в частном случае все значения можно принять равными $f_i^0 = 1$) и решается задача максиминной оптимизации

$$
\begin{aligned}
& g(\mathbf{x}) = \min_{i=1,\dots,n} \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_i^0} \to \max, \\
& \mathbf{x} \in \mathbf{X}.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты f_i^0 здесь используются для приведения всех целевых функций к примерно одному масштабу, либо наоборот, для выделения какого-либо из критериев. Основным недостатком данного подхода является возможная потеря гладкости полученной целевой функции, однако в некоторых случаях применение такого способа свертки является достаточно удобным.

4.4. Способ 4.

Приведем еще один способ, который выдает достаточно точное с точки зрения экономической интерпретации решение. Поскольку мы предполагаем, что умеем легко решать задачи однокритериальной оптимизации, то вычислим сначала максимальные и минимальные значения, которые может принимать на допустимом множестве каждая из целевых функций:

$$f_i^{\max} = \max f_i(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad i = 1,\ldots,m,$$

$$f_i^{\min} = \min f_i(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad i = 1,\ldots,m.$$

В этом случае разность этих значений

$$f_i^{\max} - f_i^{\min}$$

будет интерпретироваться как амплитуда, разность значений

$$f_i^{\max} - f_i(\mathbf{x})$$

- как абсолютное отклонение от максимума i - целевой функции в точке $\mathbf{x}$, а их частное

$$\frac{f_i^{\max} - f_i(\mathbf{x})}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}$$

- как относительное отклонение от максимума i - целевой функции (в точке максимума оно равно нулю, а в точке минимума - единице).

Способ свертки состоит в решении задачи минимизации линейной комбинации с неотрицательными весовыми коэффициентами c_i, обозначающими важность i - критерия, относительных отклонений, определенных выше:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{f_i^{\max} - f_i(\mathbf{x})}{f_i^{\max} - f_i^{\min}} \to \min,$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X},$$

$$c_i \ge 0, \ i = 1,\ldots, \quad \sum_{i=1}^{m} c_i = 1.$$

Существенным недостатков данного подхода является большой объем вычислений, необходимых для получения решения.

4.5. Способ 5. Метод идеальной точки.

Последний подход к получению однозначного решения задачи многокритериальной оптимизации несколько отличается от предложенных выше.

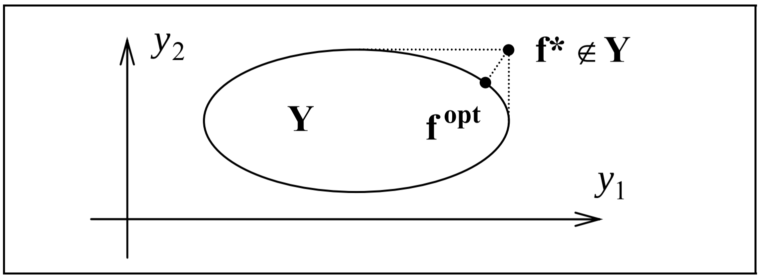
Определим множество достижимости многокритериальной задачи как множество всех возможных значений целевых функций, которые мы получаем при всех допустимых значениях $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{Y} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{R^m}: \ \mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \mathbf{X} \right\}$$

Идеальной точкой назовем вектор, состоящий из максимальных значений всех целевых функций:

$$\mathbf{f^*} = \left(\max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} f_1(\mathbf{x}), \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} f_2(\mathbf{x}), ..., \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} f_m(\mathbf{x}) \right)$$

Продемонстрируем это на рисунке:



Основным исследуемым случаем здесь, конечно, является вариант, когда $\mathbf{f^*} \notin \mathbf{Y}$. В противном случае имеется точка, в которой достигается максимум по всем критериям, она и является оптимальной.

Решением задачи многокритериальной оптимизации будем считать точку, вектор значений целевых функций в которой минимально по норме отличается от идеальной точки:

$$\left\| \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^* \right\| \to \min, \ \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Подобное решение $\mathbf{f^{opt}}$ изображено на рисунке.

Можно использовать как стандартную евклидову норму

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(f_i(\mathbf{x}) - f_i^* \right)^2} \to \min, \ \mathbf{x} \in \mathbf{X},$$

так и Чебышевскую норму (максимальное по модулю отклонение)

$$\max_{i=1,\ldots,n} \left| f_i(\mathbf{x}) - f_i^* \right| \to \min, \ \mathbf{x} \in \mathbf{X},$$

так и любой другой вид нормы.

4.6. Способ 6. Решения, оптимальные по Парето и по Слейтеру.

Рассмотрим наиболее общий подход к решению задач многокритериальной оптимизации.

Назовем решение $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ оптимальным по Парето, если не существует такого $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$, что

$$f_i(\mathbf{y}) \geq f_i(\mathbf{x}), \ i = 1, \ldots, m$$

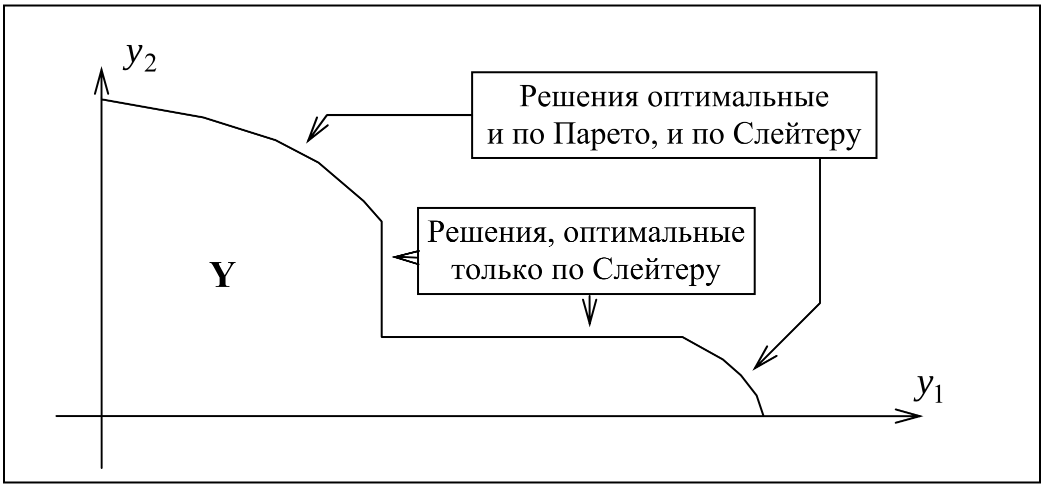
и при этом хотя бы для одного i решение выполняется в строгой форме, т.е. если нельзя улучшить решение хотя бы по одному критерию, не ухудшив его по остальным.

Решение $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ - оптимально по Слейтеру, если не существует такого $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$, что

$$f_i(\mathbf{y}) > f_i(\mathbf{x}), \ i = 1,\ldots,m,$$

т.е. если нельзя улучшить решение одновременно по всем критериям.

Понятие оптимальности по Слейтеру более широкое, чем оптимальности по Парето. Любая точка, оптимальная по Парето будет оптимальной по Слейтеру, но не наоборот. Продемонстрируем это на следующем рисунке:



Однако и Парето-оптимальные решения дают нам весь спектр оптимальных решений многокритериальной задачи.

Заметим также интересный факт: подставляя различные весовые коэффициенты c_i при решении задачи (13), мы всегда получаем Парето-оптимальное решение. Более того, любое Парето-оптимальное решение является решением задачи (13) при некотором наборе весов c_i. В этом смысле, линейная свертка является самодостаточной.

Можно также использовать это свойство следующим образом. Среди набора целевых функций часто имеется экономический критерий (например, максимизация прибыли), а также другие, не приводимые в явном виде к стоимостной форме. Например, при выборе вариантов развития производства наряду со стоимостными показателями в качестве критериев могут использоваться показатели различных вредных выбросов в природную среду или показатели экологического риска для населения. Каждому полученному Парето-оптимальному решению данной задачи можно поставить в соответствие весовые коэффициенты c_i, при которых данное решение будет решением и однокритериальной задачи (13). При умножении всех коэффициентов c_i на одно и то же число решение задачи (13) не изменится. Поэтому можно при стоимостном критерии задать единичный весовой коэффициент. Тогда коэффициенты при остальных критериях можно интерпретировать как параметры перевода измеряемых ими показателей в стоимостную форму - например, как удельные ущербы от вредных выбросов или от повышения риска для здоровья населения.

Литература

1. Воробьев Н.Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. - Л., 1974.
2. Тятюшкин А.И. Решение и анализ задач линейного программирования: Учебное пособие. - Иркутск: ИГЭА, 1994.
3. Зоркальцев В.И. Модели рыночной экономики: Учебное пособие. - Иркутск: ИГУ, 1993.

Содержание